

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

17. Band, Heft 1

3. November 1937

S. 1—48

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

**Banachiewicz, T.:** Calcul des déterminants par la méthode des cracoviens. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1937, 109—120 (1937).

Die Determinante  $D_n$  wird zerlegt in ein Produkt, dessen erster Faktor eine Unterdeterminante  $A_h$   $h$ -ter Ordnung von  $D_n$  und dessen anderer Faktor eine neue Determinante der Ordnung  $n - h$  ist, die man durch Multiplikation der Komplementärdeterminante von  $A_h$  mit einer leicht zu bestimmenden Determinante erhält. (Die Rechnung für  $h = 1$  ist dabei identisch mit der der Gaußschen Methode zur Reduktion von  $n$  Normalgleichungen auf  $n - 1$  Normalgleichungen.) *Bodewig (Basel).*

**Gantmakher, F., et M. Krein:** Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires. Compositio Math. 4, 445—476 (1937).

An abstract of this paper has appeared [C. R. Acad. Sci., Paris 201, 577—579 (1935); this Zbl. 12, 289]. A matrix  $A = \|a_{ik}\|_1^n$  is completely positive (non-negative) if all its minor determinants are positive (non-negative). It is oscillatory if it is completely non-negative and if  $A^*$  is completely positive for some positive integer  $\kappa$ . Oscillatory matrices arise in integral equation theory and are of application in the analysis of vibrations in mechanical systems of  $n$  discrete masses. In order that the completely non-negative matrix  $A$  be oscillatory, it is necessary and sufficient that it be non-singular and that the elements  $a_{i,i+1}$  and  $a_{i+1,i}$  be positive. If  $A$  is oscillatory and of order  $n$ , the minimum value of  $\kappa$  is  $\leq n - 1$ . The product of two oscillatory matrices of order  $n$  is oscillatory, and the minimum value of  $\kappa$  for the product is  $\leq [n/2]$ . The characteristic values of every oscillatory matrix are distinct and positive, and those of a completely non-negative matrix are non-negative. — A matrix is oscillatory of degree  $d$  if all minors of orders  $\leq d$  are non-negative, and if some positive integral power of  $A$  has all its minors of orders  $\leq d$  positive. It has  $d$  characteristic values which are positive, distinct, and greater in absolute value than all other characteristic values; for  $d = 1$  this reduces to a well-known theorem of Perron [Math. Ann. 64, 1—76 (1907)]. Let  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_d$  be these characteristic values, and let  $U = \|u_{ik}\|$  be a polar matrix of  $A$ ,  $AU = U(\lambda_i \delta_{ik})$ , and define  $V = (U')^{-1}$ . The vectors  $u^{(j)} = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})$ ,  $v^{(j)} = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj})$  for  $j = 1, 2, \dots, d$  can be normed so that they form a biorthogonal system and so that

$$U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} > 0, \quad V \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} > 0, \quad (p = 1, 2, \dots, d).$$

The vector  $u^{(p)}$  has exactly  $p - 1$  variations in sign. — If  $A$  is oscillatory and if  $A_{ik}(\lambda)$  is the algebraic complement of  $\lambda \delta_{ik} - a_{ik}$  in  $\lambda E - A$ , the sequence

$$A_{11}(\lambda), A_{12}(\lambda), \dots, A_{1n}(\lambda)$$

is a Sturm sequence in the interval  $(0, \infty)$  for the characteristic values of  $A$ . Five types of oscillatory matrix are given, including the generalized Vandermonian  $\|a_i^{\alpha_k}\|_1^n$  ( $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ;  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ ), and the matrices of Jacobi whose elements are all 0's except those in the main and two adjacent diagonals, these being positive, and whose principal minors in the upper left corner are all positive. *MacDuffee.*

**Gloden, A.:** Formules générales pour des chaînes trigrades. Tôhoku Math. J. 43, 387—391 (1937).

Beispiele von Identitäten  $a_1^x + a_2^x + \dots = b_1^x + b_2^x + \dots = c_1^x + c_2^x + \dots$  ( $x=1, 2, 3$ ) worin die  $a_i, b_i, c_i$  Polynome in 3 oder 4 Parametern sind. *N. G. W. H. Beeger.*



Levi, F. W.: On symmetric polynomials. Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 1—4 (1937).

Neuer Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen. Der Eindeigkeitsatz wird zuerst bewiesen; aus ihm folgt dann durch eine Betrachtung des linearen Ranges der Hauptsatz. Schließlich wird bewiesen, daß der größte gemeinsame Teiler zweier symmetrischer Funktionen gleich dem gr. gem. Teiler ihrer Ausdrücke durch die elementarsymmetrischen Funktionen ist. *van der Waerden* (Leipzig).

Schur, I.: Arithmetische Eigenschaften der Potenzsummen einer algebraischen Gleichung. Compositio Math. 4, 432—444 (1937).

Die  $n$  ersten Potenzsummen  $s_1, \dots, s_n$  lassen sich mit Hilfe der Rekursionsformeln  $s_m + a_1 s_{m-1} + \dots + a_{m-1} s_1 + m a_m = 0$  als ganze rationale Funktionen der symmetrischen Grundfunktionen  $-a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n$  darstellen, während umgekehrt erst  $A_m(s_1, \dots, s_m) = m! a_m$  ganz rational ist. Jedenfalls sind die  $a_i$ , wenn sie einem Körper  $K$  der Charakteristik 0 angehören, durch die  $s_i$  eindeutig bestimmt. Legt man nur einen festgewählten Teilring  $R$  von  $K$  zugrunde, so läßt sich nicht immer ohne Zuhilfenahme der obigen rekursiven Formeln entscheiden, ob  $n$  Größen  $s_1, \dots, s_n$  als Potenzsummen eines Polynoms in  $R$  aufgefaßt werden können oder kurz, ob diese Größen die Eigenschaft  $(R)$  besitzen. Für den Ring  $R_0$  der ganzen rationalen Zahlen wird der in anderer Formulierung von W. Jänichen stammende Satz II bewiesen:  $n$  ganze rationale Zahlen  $s_i$  besitzen die Eigenschaft  $(R_0)$  dann und nur dann, wenn für jedes  $m = 2, \dots, n$  und jede Primzahl  $p|m$ ,  $m = kp^\mu$ , die Kongruenzen

$$s_m \equiv s_{m/p} (p^\mu) \quad (1)$$

gelten. Für  $f(x) = x^n - a x^{n-1}$  ergibt sich der kleine Fermatsche Satz. Satz II gilt für beliebige Ringe  $R$ , in welchen alle Binomialkoeffizienten  $\binom{a}{h}$ ,  $a \in R$ ,  $h = 2, 3, \dots$ , in  $R$  liegen. Legt man den Ring  $R_1$  der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers  $K_1$  zugrunde, so gilt Satz III: Ist  $p$  ein Primidealteiler der Primzahl  $p|m$ ,  $\text{norm } p = P$ , und  $P_{p^\mu-1} | m$  ( $\mu \geq 1$ ), so gilt

$$s_m \equiv s_{m/P} (p^\mu).$$

Dagegen reicht das Bestehen dieser Kongruenzen nicht hin, damit jedes System von  $n$  Größen von  $R_1$  die Eigenschaft  $(R_1)$  besitze wie  $f(x) = x^n - \binom{a}{1} x^{n-1} + \binom{a}{2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{a}{n}$  mit  $s_m = a$  zeigt. Denn  $\binom{a}{m}$  braucht keine ganze algebraische Zahl zu sein. Für Teilringe  $R$  beliebiger Körper werden die beiden folgenden Kriterien abgeleitet: Satz IV. Dann und nur dann besitzen  $n$  Größen  $s_i$  aus  $R$  die Eig.  $(R)$ , wenn die mit Hilfe der Gleichungen

$$s_m = \sum_{d|m} d c_d^{m/d} \quad (m = 1, \dots, n)$$

eindeutig bestimmten Größen  $c_1, \dots, c_n$  aus  $K$  in  $R$  liegen. Satz V: Für eine feste Primzahl  $p$  sei  $R^{(p)}$  der  $R$  enthaltende Ring aller Größen  $r/h$ ,  $r \in R$ ,  $(h, p) = 1$ . Dann und nur dann besitzen  $n$  Größen  $s_i$  aus  $R^{(p)}$  die Eigenschaft  $(R^{(p)})$ , wenn für jedes  $m \leq n$  der Form  $m = kp^\mu$ ,  $(k, p) = 1$ ,  $\mu \geq 0$  die mit Hilfe der Gleichungen

$$s_m = z_{k,0}^{p^\mu} + p z_{k,1}^{p^\mu-1} + \dots + p^\mu z_{k,p^\mu}$$

eindeutig bestimmten Größen  $z_{k,\lambda}$  aus  $K$  in  $R^{(p)}$  liegen. Mit Hilfe dieses Satzes wird gezeigt: Es sei  $K$  ein Körper der Charakteristik 0,  $p$  eine feste rationale Primzahl. Die Teilringe  $R$  von  $K$ , in welchen alle Binomialkoeffizienten  $\binom{a}{m}$ ,  $a \in R$ ,  $m = 2, 3, \dots$  mod  $p$  in  $R$  liegen, stimmen mit denjenigen überein, in welchen der kleine Fermatsche Satz gilt, d. h.  $\frac{1}{p}(a^p - a)$  in  $R$  enthalten ist. *Taussky* (Cambridge).

Perron, O.: Über eine Resultante. Mat. fiz. Lap. 44, 48—49 u. deutsch. Zusammenfassung 49—50 (1937) [Ungarisch].

Neuer Beweis zu der in dies. Zbl. 15, 149 ref. Arbeit von Grosschmidt und Szücs.



## Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

**Kuntzmann, J.:** Homomorphie entre systèmes multiformes. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 208—210 (1937).

Verf. betrachtet eindeutige, umkehrbare, aber nicht umkehrbar eindeutige Korrespondenzen und gibt für sie zwei Arten von Homomorphismen an: Die erste verlangt die Rückübertragbarkeit der Multiplikation und der rechts- und linksseitigen Division. Die zweite verlangt, daß alle Elemente, die mit einem Element  $\alpha$  multipliziert werden können, dasselbe Bild haben. Verf. betrachtet insbesondere Homomorphismen von Hypergruppen.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

**Borůvka, Ottokar:** Sur les systèmes multiplicatifs. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1779—1781 (1937).

The author considers systems  $\mathfrak{M}$  in which (1) an associative multiplication is defined, and (2) for all  $\alpha$ , the set  $M_\alpha$  of products  $x_1 \dots x_\alpha$  not representable as products  $x_1 \dots x_{\alpha+1}$ , is non-void. He characterizes abstractly (1) the homomorphic representations of such an  $\mathfrak{M}$  on the system  $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ , and (2) "homogeneous" systems in which every product  $x_1 \dots x_\alpha$  of elements of  $M_1$  is in  $M_\alpha$ . The details will appear in a monograph "Studies on multiplicative systems", to be published by Masaryk University.

Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

**Nakayama, Tadasu:** Über die Klassifikation halbliner Transformationen. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 99—107 (1937).

Eine halbliner Transformation  $(A, S)$  eines  $n$ -dimensionalen Vektormoduls über einem Körper  $K$  wird definiert mit Hilfe der Matrix  $A = (\alpha_{ik})$  und des Automorphismus  $S$  von  $K$  als eine Abbildung:  $\sum_1^n \mu_i \xi_i \rightarrow \sum_{i,k=1}^n \mu_i \alpha_{ik} \xi_k^S$ . Zwei halbliner Transformationen  $(A, S)$  und  $(B, S)$  heißen äquivalent, wenn sie durch lineare Transformation der Basisvektoren auseinander hervorgehen, wenn es also eine nichtsinguläre Matrix  $P$  gibt, so daß  $B = P^{-S} A P$ . Unter der Annahme, daß  $S$  die endliche Ordnung  $m$  besitzt, wird bewiesen, daß die Elementarteiler der Matrix  $NA = A^{Sm-1} + S^{m-2} \dots + S + 1$  (Reihenfolge der Addition beachten!) und die Ränge der  $m-1$  Matrizen  $A, A^{S+1}, \dots, A^{Sm-2} + S^{m-3} \dots + S + 1$  ein volles Invariantensystem bilden. Für nichtsinguläre Matrizen  $A$  bedeutet das eine Verallgemeinerung von Hilbert, Zahlbericht Satz 90: Wenn  $NA$  und  $NB$  ähnlich sind, so ist  $B = P^{-S} A P$  durch eine nichtsinguläre Matrix  $P$  lösbar und umgekehrt. Als Hilfsmittel für die Beweise wird die Kötchesche Theorie der einreihigen Ringe benutzt.

Zassenhaus (Hamburg).

**Zorn, Max:** On a theorem of Engel. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 401—404 (1937).

The author gives a very elementary proof of the following extension of Engel's theorem: Let  $L$  be a Lie ring [non-associative ring in which  $ab = -ba$ ,  $a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0$ ] with a commutative set of operators  $P$  such that every system of allowable subrings  $< L$  contains a maximal allowable subring. Then if every element of  $L$  is nilpotent in the sense that  $(a(a \dots (ab) \dots)) = 0$  then  $L$  is nilpotent in the sense that an  $N$  exists such that  $(a_1(a_2 \dots (a_{N-1} a_N) \dots)) = 0$  for all  $a_i$  in  $L$ . Jacobson.

## Zahlentheorie:

**Amato, Vincenzo:** Di un algoritmo per il calcolo del minimo comune multiplo. Esercit. Mat. 10, 36—39 (1937).

Bedeutet  $D$  den größten gemeinsamen Teiler,  $m$  das kleinste gemeinsame Vielfache, und setzt man rekurrent  $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_h) = D(n_1, n_2, \dots, n_{h-1}, n_h \cdot D(n_1, n_2, \dots, n_{h-1}))$ ;  $\Delta(n_1) = 1$ , so gilt  $\frac{n_1 n_2 \dots n_h}{\Delta(n_1, n_2, \dots, n_h)} = m(n_1, n_2, \dots, n_h)$ . Es ist ferner independent  $\Delta(n_1, n_2, \dots, n_h) = D(n_1, n_2) \cdot D(m(n_1, n_2), n_3) \dots \cdot D(m(n_1, n_2, \dots, n_{h-1}), n_h)$ . Eine ganz gleich gebaute Formel gilt auch für Polynome. Es folgen noch Anwendungen auf die charakteristische Gleichung einer gewissen Matrix. L. Schrutka (Wien).



**Ducci, Enrico:** Sulla totalità dei numeri primi. II. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 139—144 (1936).

Tabelle der Werte von  $n = \pi(P) + \varphi(A) \cdot N : A$  und  $n - \pi(N)$  für  $N = 4, 5, \dots, 161$ .  $P$  ist die größte Primzahl, für welche  $P^2 \leq N$  und  $\pi(x)$  ist die Anzahl der Primzahlen  $\leq x$ . (I. vgl. dies. Zbl. 15, 197.) N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Hall, Newman A.:** Binary quadratic discriminants with a single class of reduced forms in each genus. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 23, 414—415 (1937).

Verf. bemerkt, daß die Klassenzahl definiter, binärer quadratischer Formen größer ist als die Anzahl der Geschlechter, falls die Diskriminante in gewissen arithmetischen Progressionen liegt. Hans Heilbronn (Cambridge).

**Carlitz, Leonard:** Criteria for certain higher congruences. Amer. J. Math. 59, 618—628 (1937).

Im Bereich der Polynome in  $x$  mit Koeffizienten aus  $GF(q)$  wird die Kongruenz

$$g_s(u) = \sum_0^s C_i u^{q^i} \equiv M \pmod{P} \quad (1)$$

betrachtet; darin bedeuten  $C_i$  ganz bestimmte Polynome, die aus Faktoren  $x^{q^k} - x$  zusammengesetzt sind,  $M$  ein beliebiges Polynom und  $P$  ein irreduzibles Polynom vom Grade  $k$ . Es wird ein Polynom  $f_s(u)$  mit den Eigenschaften

$$f_s(g_s(u)) \equiv g_s(f_s(u)) \equiv u - u^{q^k} \pmod{P}$$

angegeben, welches  $\pmod{P}$  ganz in Linearfaktoren in  $u$  zerfällt. Die Kongruenz (1) ist dann und nur dann lösbar und hat genau  $q^k$  Lösungen, wenn

$$f_s(M) \equiv 0 \pmod{P}$$

ist. Die Wurzeln von  $g_s(u) \equiv 0 \pmod{P}$  werden angegeben, ebenso die Faktorzerlegung von  $g_s(u) - M \pmod{P}$ . van der Waerden (Leipzig).

**Erdős, Paul, und Richard Obláth:** Über diophantische Gleichungen der Form  $n! = x^p \pm y^p$  und  $n! \pm m! = x^p$ . Acta Litt. Sci. Szeged. 8, 241—255 (1937).

Verff. untersuchen die diophantischen Gleichungen  $x^p + y^p = n!$ ,  $p > 1$ ,  $(x, y) = 1$ ,  $n > 2$  und  $x^p - y^p = n!$ ,  $p > 2$ ,  $(x, y) = 1$ ,  $n > 2$  und zeigen, daß keine Lösungen existieren, abgesehen von der Gleichung  $x^4 - y^4 = n!$ , die möglicherweise eine endliche Lösungszahl besitzt. — Ferner wird gezeigt, daß die Gleichungen  $m! \pm n! = x^p$ ,  $m > n > 1$ ,  $p > 1$  nur endlich viele Lösungen haben. Hans Heilbronn.

**Mordell, L. J.:** A remark on indeterminate equations in several variables. J. London Math. Soc. 12, 127—129 (1937).

Sei  $f_n^{(r)}(x)$  ein  $r$ -dimensionales indefinites homogenes Polynom in  $n$  Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  mit ganzen rationalen Koeffizienten. Man vermutet, daß für  $n \geq r^2 + 1$  die Gleichung  $f_n^{(r)}(x) = 0$  stets eine nichttriviale, d. h. von  $x_1 = \dots = x_n = 0$  verschiedene ganzzahlige Lösung hat; für  $r = 2$  wurde dies schon von A. Meyer bewiesen. (Math. Mitt. Züricher Naturf. Gesellsch. 1833. S. auch: H. Minkowski: Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen ineinander rational transformiert werden können. J. reine angew. Math. 106.) Dagegen gibt es für  $n = r^2$  und  $r \geq 2$  stets Gleichungen  $f_n^{(r)}(x) = 0$ , die keine nichttriviale Lösung haben. Für  $r = 2$  leistet dies z. B. die Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - 3(x_3^2 + x_4^2) = 0$ ; für  $r \geq 3$  ergeben sich derartige Gleichungen aus der Theorie der relativ-zyklischen Körper. Verf. gibt einen sehr einfachen neuen Beweis für die letztere Aussage unter der Annahme  $r = 3$  (für  $r \geq 4$  führt das gleiche Verfahren ebenfalls zum Ziel): Unter  $p$  werde eine Primzahl, unter  $N_s(x_s, y_s, z_s)$  ( $s = 1, 2, 3$ ) je eine ganzzahlige kubische Ternärform verstanden, so daß  $N_s(x_s, y_s, z_s) \equiv 0 \pmod{p}$  nur die triviale Lösung  $x_s \equiv y_s \equiv z_s \equiv 0 \pmod{p}$  hat (solche Formen gibt es, wie aus der Idealtheorie in kubischen Zahlkörpern folgt). — Weiter sei  $L$  eine kubische Form in 9 Veränderlichen von der speziellen Gestalt  $L = \sum_{\lambda, \mu, \nu=1}^3 a_{\lambda\mu\nu} x_\lambda y_\mu z_\nu$ , wo die  $a_{\lambda\mu\nu}$  ganze durch  $p$

teilbare Zahlen sind und nur Terme mit voneinander verschiedenen Indizes  $\lambda, \mu, \nu$  auftreten. Dann leistet die Gleichung

$$N_1(x_1 y_1 z_1) + p N_2(x_2 y_2 z_2) + p^2 N_3(x_3 y_3 z_3) + L = 0$$

alles Verlangte.

Mahler (Krefeld).

Romanoff, N. P.: Berichtigung zu der Arbeit: „Zum Goldbachschen Problem“. [Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1 (1935), S. 34—38.] Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 301 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 11, 390.

Pillai, S. S.: Waring's problem. V.: On  $g(6)$ . J. Indian Math., Soc., N. s. 2, 213—214 (1937).

By putting  $s = 13$  and  $n = 6$  in the calculations of his former paper "On Waring's Problem IV" (this Zbl. 15, 343) the author proves that  $g(6) \leq 104$ . The previous best known result was Dickson's that  $g(6) \leq 110$ . Wright (Aberdeen).

Kestelman, H.: An integral connected with Waring's problem. J. London Math. Soc. 12, 232—240 (1937).

Verf. beweist die folgende Identität: Es seien  $s$  positive Größen gegeben;

$a_1, a_2, \dots, a_s$ . Es sei  $\psi_r(x) = \int_0^1 e^{2\pi i x w} w^{\alpha_r - 1} dw$ ,  $\alpha = a_1 + \dots + a_s$ . Dann ist

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x v} \prod_{r=1}^s \psi_r(x) dx = v^{\alpha-1} \frac{\prod_{r=1}^s \Gamma(a_r)}{\Gamma(\alpha)}$  für  $0 < v < 1$  und  $v = 1, s > 1$ , während das Integral für  $v < 0$  verschwindet. — Spezialfälle dieser Formel spielen im Waring'schen Problem eine Rolle. Hans Heilbronn (Cambridge).

Chowla, L.: A theorem on the addition of residue classes: Application to the number  $\Gamma(k)$  in Waring's problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 99—102 (1937).

Der Satz von Davenport über die Addition von Restklassen modulo einer Primzahl [J. London Math. Soc. 10, 30—32 (1935); dies. Zbl. 10, 389] gilt unverändert für zusammengesetzte Moduln  $m$ , falls eine der beiden Restklassenfolgen die Null enthält und im übrigen nur aus solchen Restklassen besteht, die zu  $m$  prim sind. Diese Verallgemeinerung benutzt Verf. zum Beweis folgender Sätze: 1. Ist  $s \geq 4k$  und sind die ganzen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_s$  prim zu  $m$ , so enthält jede arithmetische Progression  $mx + a$  unendlich viele Zahlen der Form  $a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_s x_s^k$ , wo sämtliche  $x_i$  ganz sind; 2. für ungerade  $m$  gilt dasselbe schon bei  $s \geq \frac{3}{2}k$ .

A. Khintchine (Moskau).

Chowla, S.: On some infinite series involving arithmetical functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 511—513 (1937).

Let

$$\{x\} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}.$$

It is proved that, if  $c_n = O(n^{\Phi})$ , where  $\Phi < \frac{1}{3}$ , and  $G_n = \sum_{d|n} c_d$ , then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \{n\theta\} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \sin 2n\pi\theta}{n}$$

for almost all  $\theta$ . See Davenport, this Zbl. 16, 201. E. C. Titchmarsh (Oxford).

Chowla, S.: On some infinite series involving arithmetical functions. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 5, 514—516 (1937).

Under the same conditions as in the previous paper

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \log(2|\sin n\pi\theta|)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \cos 2n\pi\theta}{n}$$

for almost all  $\theta$ .

E. C. Titchmarsh (Oxford).



## Gruppentheorie.

Coxeter, H. S. M.: Abstract definitions for the symmetry groups of the regular polytopes, in terms of two generators. Pt. II. The rotation groups. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 315—324 (1937).

Nachdem im ersten Teile (s. dies. Zbl. 14, 151) die volle Symmetriegruppe eines jeden regulären Polytopes mittels zweier Erzeugenden abstrakt definiert wurde, wird dieselbe Aufgabe für die reine Drehgruppe durchgeführt. Also werden die alternierende Gruppe und die Hyperoktaedergruppe behandelt, ferner die speziellen vierdimensionalen Gruppen, bei denen die Gruppe des Polytopes (3, 4, 3) auf die doppelte Ordnung erweitert werden muß durch Hinzunahme des dazu reziproken Polytopes, um die Erzeugendenzahl von drei auf zwei zu reduzieren. J. J. Burckhardt (Zürich).

Robinson, G. de B.: On the fundamental region of an orthogonal representation of a finite group. Proc. London Math. Soc., II. s. 43, 289—301 (1937).

Durch die Arbeiten von Coxeter (s. dies. Zbl. 10, 11) sind die Fundamentalbereiche der Polyedergruppen genau bekannt geworden. Dabei werden stillschweigend die abstrakt gegebenen Gruppen als durch ihre geometrische Konfiguration dargestellt betrachtet und die gefundenen Sätze gelten nur für diese spezielle Darstellung. In der vorliegenden Arbeit werden die übrigen orthogonalen Darstellungen obiger Gruppen herangezogen und gefragt, in welchen Fällen sie einen samt seiner Begrenzung bestimmten Fundamentalbereich besitzen. Die Antwort wird mittels der Darstellungstheorie gefunden, die geometrisch ausgewertet wird. Sei  $(\alpha)$  eine irreduzible orthogonale Darstellung der Gruppe  $G$  vom Grade  $f_\alpha$ ,  $H$  eine Untergruppe,  $g_H$  die induzierte Darstellung,  $S_H^\alpha$  gebe an, wie oft  $(\alpha)$  in  $g_H$  enthalten sei, so ist der Fundamentalbereich nur dann völlig bestimmt, wenn  $S_H^\alpha$  alle Werte von 1 bis  $f_\alpha$  annimmt, wenn  $H$  alle Untergruppen durchläuft. Zum Beweis wird zuerst die Berechnung der  $S_H^\alpha$  aus den Charakteren angegeben. Hat man die Darstellung der Faktorgruppe  $G/H$  der Ordnung  $r$ , so verwendet man das  $r$ -dimensionale Simplex  $(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$  als invariante Figur und übt darauf die passend transformierte Darstellung  $(\alpha)$  aus. Durch Projektion auf die Hypersphäre und die Abzählung der darauf linear unabhängigen Punkte findet man, bis zu welchem Grade der Fundamentalbereich bestimmt ist. Die Ausführungen werden an der symmetrischen Gruppe in vier Symbolen illustriert. J. J. Burckhardt (Zürich).

Specht, Wilhelm: Darstellungstheorie der Hyperoktaedergruppe. Math. Z. 42, 629—640 (1937).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 11, 103) hat der Verf. Eigensysteme für die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Permutationsgruppe angegeben. Darunter versteht man ein System von linear unabhängigen Polynomen der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  derart, daß bei einer Permutation  $P$  der Variablen das System gerade die  $P$  entsprechende lineare Transformation erfährt. Hier löst er die gleiche Aufgabe für die Hyperoktaedergruppe der Ordnung  $2^n \cdot n!$ . Diese Gruppe entsteht aus der symmetrischen Gruppe, wenn man die Permutationen der Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noch mit allen möglichen Vorzeichenänderungen verbindet. R. Brauer.

Specht, Wilhelm: Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe. Math. Z. 42, 774—779 (1937).

Unter einer vollständig unsymmetrischen Funktion  $f(x)$  wird eine ganze rationale homogene Funktion der  $n$  Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  verstanden, für die die  $n!$  aus  $f(x)$  durch eine Permutation  $P$  der Veränderlichen hervorgehenden Funktionen  $f^P(x)$  linear unabhängig sind. Unter dem Einfluß einer festen Permutation  $Q$  der Veränderlichen permutieren sich die  $f^P(x)$ , sie erleiden die  $Q$  in der regulären Darstellung der symmetrischen Gruppe entsprechende Transformation. Da jede irreduzible Darstellung  $\mathfrak{Q}$  in der regulären Darstellung enthalten ist, muß es möglich sein, lineare Verbindungen der  $f^P(x)$  anzugeben, die unter dem Einfluß einer Permutation der  $x$ , die



zugehörige Transformation von  $\mathfrak{G}$  erleiden. Physikalische Anwendungen ließen die wirkliche Angabe derartiger linearer Verbindungen als wünschenswert erscheinen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Konstruktion durchgeführt. *R. Brauer* (Toronto).

**Asano, Keizō, Masaru Osima und Mutuo Takahasi:** Über die Darstellung von Gruppen durch Kollineationen im Körper der Charakteristik  $p$ . *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 19, 199—209 (1937).

Es handelt sich um die Übertragung der von I. Schur [*J. t. Math.* 127 (1904); 132 (1907)] ausgeführten Untersuchungen über die Darstellung endlicher Gruppen in Kollineationen auf den Fall, daß die Charakteristik des Koeffizientenkörpers in der Gruppenordnung aufgeht. Ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik  $p$  in der Ordnung  $h$  der endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  aufgeht, so werden Faktorensysteme und Darstellungsgruppe über  $K$  wie üblich definiert. Ist  $\mathfrak{M}$  die (Abelsche) Gruppe der Klassen äquivalenter Faktorensysteme über  $K$ , so ist die Gruppe  $\mathfrak{G}$  genau dann Darstellungsgruppe zu  $\mathfrak{G}$ , wenn  $\mathfrak{G}$  einen Normalteiler  $\mathfrak{A}$  besitzt, der sowohl im Zentrum als auch in der Kommutatorgruppe von  $\mathfrak{G}$  liegt, so daß die Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{A}$  zu  $\mathfrak{G}$  isomorph ist und die Ordnung von  $\mathfrak{A}$  gleich der Ordnung  $m$  von  $\mathfrak{M}$  ist. Eine bestimmte Darstellungsgruppe wird in bekannter Weise konstruiert [K. Asano und K. Shoda, *Compos. Math.* 2, 230—240 (1935); dies. *Zbl.* 12, 54]. Bedeuten  $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{A}_0$  die entsprechend über algebraisch abgeschlossenem Körper der Charakteristik Null gebildeten Gruppen, so ist  $\mathfrak{M}$  isomorph zur Faktorgruppe von  $\mathfrak{M}_0$  nach der  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathfrak{M}_0$ ; jede Darstellungsgruppe  $\mathfrak{G}$  wird erhalten als Faktorgruppe einer Gruppe  $\mathfrak{G}_0$  nach der  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathfrak{A}_0$ . Nach einem bekannten Satz von R. Brauer (Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern. *Actualités sc. et ind.* 195; dies. *Zbl.* 10, 344) folgt, daß die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen projektiven Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  in  $K$  gleich der Anzahl derjenigen Klassen konjugierter Elemente von  $\mathfrak{G}$  ist, in denen die Ordnung der Elemente zu  $p$  teilerfremd ist. Die Anzahl der wes. versch. irr. proj. Darst. von  $\mathfrak{G}$ , die zu demselben Faktorsystem  $c_{P,Q}$  gehören, ist gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente aus  $\mathfrak{G}$  mit zu  $p$  teilerfremder Ordnung, vermindert um die Anzahl derjenigen Klassen, in denen es ein Element  $P$  gibt, so daß für wenigstens ein mit  $P$  vertauschbares Element  $Q$  gilt:  $c_{P,Q} \neq c_{Q,P}$ . Konstruiert man mit Hilfe des Faktorsystems  $c_{P,Q}$  das hyperkomplexe System  $(c, \mathfrak{G}) = Ku_P + Ku_Q + Ku_R + \dots$  mit der Kompositionsregel:  $u_P u_Q = c_{P,Q} u_{PQ}$ , so liefern die gewöhnlichen Darst. von  $(c, \mathfrak{G})$  alle proj. Darst. von  $\mathfrak{G}$  mit dem Faktorsystem  $c_{P,Q}$ . Wie bei Brauer gilt der Satz: Besitzt die reguläre Darstellung von  $(c, \mathfrak{G})$  in  $K$  im ganzen  $k$  wesentlich verschiedene, irreduzible Bestandteile vom Grad  $f_\lambda$  und der Vielfachheit  $e_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, k$ ), so besitzt sie auch  $k$  wesentlich verschiedene, unzerfällbare Bestandteile, einen  $f_1$ -fachen vom Grade  $e_1$ , einen  $f_2$ -fachen vom Grade  $e_2$  usw. Ebenfalls gilt dann:  $h = \sum_{\lambda=1}^k e_\lambda f_\lambda$ . Zassenhaus.

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Grünwald, Géza:** Über einen mengentheoretischen Satz. *Mat. fiz. Lap.* 44, 51—53 (1937) [Ungarisch].

Es wird bewiesen: Jedem Elemente  $x$  der nicht abzählbaren Menge  $M$  seien endlich viele von  $x$  verschiedene Elemente von  $M$  zugeordnet; dann besitzt die Menge  $M$  eine unendliche Teilmenge  $N$  mit der Eigenschaft, daß nie ein Element von  $N$  einem Elemente von  $N$  zugeordnet ist. Autoreferat

**Sierpiński, W.:** Vorlesungen über analytische Mengen gehalten an der Universität Cluj Mai 1932. (Monogr. Mat. Fasc. 2.) Cluj: Inst. de Arte Graf. „Ardealul“ 1937. 16 S.

**Piccard, Sophie:** Généralisation d'un théorème de M. Sierpiński de la théorie des relations. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 29, 99—101 (1937)



Ward, A. J.: A sufficient condition for a function of intervals to be monotone. *Fundam. Math.* 29, 22—25 (1937).

Etant donnée une fonction d'intervalle  $F$ , on appelle dérivés symétriques, supérieur et inférieur respectivement, dans un point  $p$  les deux limites d'indétermination du quotient  $F(I)/|I|$  où  $I$  désigne le carré (cube) centré au point  $p$  et de diamètre tendant vers 0. L'auteur établit le théorème suivant: Si le dérivé symétrique supérieur d'une fonction additive d'intervalle, continue et à variation bornée, est non-négatif dans chaque point, la fonction est aussi non-négative. La démonstration est simple mais ingénieuse. Saks (Warszawa).

Froda, Alex.: Sur quelques propriétés métriques des ensembles de points. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* 38, 75—95 (1936).

This paper is preliminary to a prospective study by the author of certain metric properties of one- and many-valued, real functions. Many of the results are not really new, but may not have appeared in the literature in the author's formulation. The consideration of multiple ( $n$ -dimensional, point) sets leads to extensions of various elementary, metric properties of ordinary (point) sets. A multiple set, designated by  $\bar{E}$ , is one in which every element  $P$  has a certain order (of multiplicity)  $m$ , is regarded as taken  $m$  times; here  $m$  is a positive integer and a function of  $P$ . If  $\bar{E}$  is a multiple set, the set  $E$ , called the fundamental set of  $\bar{E}$ , is the set consisting of the points of  $\bar{E}$  each taken just once. The sum  $\bar{S}$  of the multiple sets  $\bar{E}_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) is a multiple set whose fundamental set  $S$  consists of the ordinary sum  $\sum E_p$ , and the order of an element  $P$  of  $\sum E_p$  is the sum of the orders of this element in the different  $E_p$ , the order of  $P$  in  $E_p$  counting as 0 if  $P$  is not in  $E_p$ . Multiplication of multiple sets is defined as a natural extension of ordinary multiplication (as a set of pairs). If  $\bar{E}$  is a multiple set, it may be uniquely decomposed as a sum of multiple sets of mutually exclusive fundamental sets and homogeneous in respect to the order of the elements, as follows:  $\bar{E} = \bar{E}' + \bar{E}^2 + \dots + \bar{E}^k + \dots$ , where  $\bar{E}^k$  takes each point of  $E^k$   $k$  times. The exterior measure  $m_e \bar{E}$  of  $\bar{E}$  is defined as  $m_e \bar{E}' + 2m_e \bar{E}^2 + \dots + km_e \bar{E}^k + \dots$ , where  $m_e E^k$  means ordinary, Lebesgue exterior measure. The interior measure  $m_i \bar{E}$  is defined similarly.  $\bar{E}$  is said to be measurable ( $\text{mes } \bar{E} = \text{measure of } \bar{E}$ ) if  $m_e \bar{E} = m_i \bar{E}$ .

If  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_k, \dots$  is a sequence of measurable multiple sets and  $\bar{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{E}_k$ , then  $\text{mes } \bar{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes } \bar{E}_k$ . If  $M_1, M_2, \dots, M_p$  are given measurable sets, the difference  $\sum_1^p \text{mes } M_k - \text{mes } \sum_1^p M_k$ , the latter sum taken in the ordinary sense, is called by the

author the measure of contact of the given sets and denoted by  $\gamma(M_1, M_2, \dots, M_p)$ . He proves: a) If  $E_1, E_2, \dots, E_p$  are  $p$  mutually exclusive sets, and each  $E_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) is enclosed in a measurable set  $M_k$ , then  $m_e \sum E_k \geq \sum m_e E_k - \gamma(M_1, \dots, M_k)$  and  $m_i \sum E_k \leq \sum m_i E_k + \gamma(M_1, \dots, M_k)$ . b) If  $E_1, E_2, \dots, E_p$  are  $p$  sets and  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) is a measurable set containing  $E_k$  with  $\text{mes } G_k = m_e(E_k)$ , then  $m_e \sum E_k = \sum m_e E_k - \gamma(G_1, \dots, G_p)$ . Among a variety of other results: c) The limit set of a sequence  $E_k$  whose degree of non-measurability  $\nu(E_k) (= m_e E - m_i E_k)$  approaches zero as  $k$  approaches  $\infty$  is measurable. d) The set of points of measurability of a set  $E$  is open, the set of points of non-measurability perfect,  $P$  being a point of measurability or non-measurability of  $E$  according to whether there exists or does not exist an ( $n$ -dimensional) interval  $\delta_n$  enclosing  $P$  such that  $\delta_n E$  is measurable. e) A necessary and sufficient condition that  $E$  be non-measurable on every perfect set of positive measure (of an interval  $\Delta_n$ ) is that  $m_e E = \text{mes } \Delta_n$ ,  $m_i E = 0$ . f) Every set is the sum of a set, which lies in and is completely non-measurable on a measurable set  $G$  (i.e.,  $m_e \bar{E}_1 = \text{mes } G$ ,  $m_i \bar{E}_1 = 0$ ) and a set having no points in common with  $G$ . Blumberg (Columbus).



**Braun, Stefania:** Sur l'uniformisation des ensembles mesurables *B. C. R. Soc. Sci. Varsovie* 29, 102—105 (1937).

Démonstrations de deux théorèmes sur l'uniformisation des ensembles plans; d'après le second il existe une fonction  $f(x)$  définie en tout point de l'axe  $OX$  et semi-continue supérieurement, dont l'ensemble des valeurs  $y = f(x)$  coïncide avec l'ensemble de tous les nombres réels et dont l'image ne peut être uniformisée relativement à l'axe  $OY$  au moyen d'aucun ensemble analytique. Comparer P. Novikoff, *Fundam. Math.* 17, 25 (1931), ce Zbl. 3, 108.

*J. Ridder* (Groningen).

**Luikens, Houko:** Riemann-Stieltjes Integration von Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen. Groningen: Diss. 1937. 163 S.

Ein vom Ref. für Funktionen einer Veränderlichen definierter Integralbegriff (*Prace mat. fiz.* 41; dies. Zbl. 9, 206) wird in dieser Arbeit auf den Fall von Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen übertragen; die Intervallfunktion  $\psi(i)$ , in bezug auf welche integriert wird, ist dabei immer von beschränkter Wertsomme. Die Kapitel 3, 5 und 6 enthalten drei einander gleichwertige Integraldefinitionen: 1. mittels „Riemann“-Summen; 2. mit Hilfe von „Jordan“-Maßen der Ordinatenmengen; 3. mittels Zerlegungen der Ordinatenachse in gleicher Weise wie bei der von Lebesgue herrührenden analytischen Definition seines Integrals. Zur Integrierbarkeit von  $f$  in bezug auf  $\psi(i)$  ist notwendig und hinreichend: 1. Beschränktheit von  $f$ ; und: 2. „Jordan“-Meßbarkeit in bezug auf  $\psi(i)$  der Mengen  $E[f \geq y]$  für alle reellen  $y$ -Werte, vielleicht abzählbar viele ausgenommen. In den Kapiteln 4 und 7 findet man u. a. Sätze über partielle Integration, über Reduktion eines mehrfachen Integrals im  $(k + l)$ -dimensionalen Raum, über Existenz und Gleichheit von zwei- und mehrfach iterierten Integralen und Verallgemeinerungen des Osgood-Arzelaschen Satzes über die gliedweise Integrierbarkeit von Reihen.

*J. Ridder* (Groningen).

**Denjoy, Arnaud:** Sur l'approximation de certaines sommes. *C. R. Acad. Sci., Paris* 204, 1396—1398 (1937).

Soit  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  une subdivision quelconque de l'intervalle  $(a, b)$ . Soit  $F(x)$  une fonction définie dans  $(a, b)$  et  $\alpha$  un nombre positif quelconque. L'auteur considère les expressions (\*)  $\sum_{i=1}^n \left| \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|^\alpha (x_i - x_{i-1})$  pour

$n \rightarrow \infty$ ,  $\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ , et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la dérivée  $F'(x)$  existe presque partout et les sommes (\*) tendent vers  $\int_a^b |F'(x)|^\alpha dx$ .

Les résultats obtenus par l'auteur ont été partiellement connus. Cf. H. Hahn, *Mh. Math. Phys.* 23, 161—183 (1912), et S. Saks, *Fundam. Math.* 10, 211—224 (1927).

*A. Zygmund* (Wilno).

## Analysis.

**Lebesgue, Henri:** Sur certaines expressions irrationnelles illimitées. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 29, 17—28 (1937).

Wenn im dyadischen System  $\alpha = 0, \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots$  ist, so gilt die Formel  $\cos \alpha \pi = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \varepsilon_3 \sqrt{2 + \dots}}} \right] = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$ , wo die  $\varepsilon_n = \pm 1$  durch die Gleichungen  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 1 - 2\eta_n$  bestimmt sind. Eine ähnliche Darstellung findet sich schon in den Werken von Vieta. Dann und nur dann ist die Entwicklung periodisch, wenn  $\alpha$  rational ist; die Entwicklungen mit den Perioden 1 bis 4 werden angegeben.

*Rogosinski* (Berlin).

**De Finetti, B.:** Problemi di „optimum“ vincolato. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 8, 112—126 (1937).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 16, 159). Verf. stellt hier die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für Optimumprobleme mit Nebenbedin-



gungen auf. Sind  $\varphi_1(x_1, \dots, x_q), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_q)$ ,  $n \leq q - s$ , die Funktionen, für die die optimale Mannigfaltigkeit bestimmt werden soll, und  $G_1(x_1, \dots, x_q) = 0, \dots, G_s(x_1, \dots, x_q) = 0$  die Nebenbedingungen, so ergeben sich als Bedingungen, daß die Funktionalmatrix der  $\varphi_\nu$  und  $G_\sigma$  einen Rang kleiner als  $n + s$  besitzt, sowie gewisse Ungleichungen. — Geometrische und nationalökonomische Beispiele.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Norris, Nilan: Convexity properties of generalized mean value functions. Ann. math. Statist. 8, 118—120 (1937).

Bekanntlich sind der Potenzmittelwert

$$\varphi(t) = \left[ \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{n} \right]^{\frac{1}{t}}, \quad x_\nu > 0,$$

sowie die entsprechenden gewogenen und Integralmittel monoton wachsende Funktionen von  $t$ , wofür auch der Verf. einen Beweis angegeben hat (vgl. dies. Zbl. 11, 205). Hier wird in einigen für die Statistik wichtigen Spezialfällen das Verhalten der zweiten Ableitung von  $\varphi$  diskutiert. Die Resultate lassen keine einfache Gesetzmäßigkeit erkennen.

Fenchel (Kopenhagen).

### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Sz. Nagy, Béla v.: Über die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems. Mat. termézet. Értes. 55, 574—589 u. deutsch. Zusammenfassung 590—591 (1937) [Ungarisch].

Let  $\{\psi_n\}$  be a finite or infinite system of functions which are orthogonal in the sense of a certain Stieltjes-Lebesgue integral and satisfy the closure condition formulated at the end of the review of a former paper of the author (this Zbl. 15, 300; cf. the correction in 15, 490). Then the cubic matrix  $(c_{pqr}) = \int \psi_p \psi_q \psi_r d\alpha$  has the following properties. The matrices  $C_p = (c_{pqr})$  ( $p$  fixed,  $q$  and  $r$  are variable) are symmetric, permutable, and bounded in the Hilbert sense;  $(C_p)_{qr} = (C_q)_{pr}$ ,  $(C_p C_p)_{qr} = (C_q C_p)_{pr}$ ; finally  $\sum x_p C_p = 0$  ( $\sum x_p^2$  converges) involves  $x_p = 0$ . — Conversely if  $(c_{pqr})$  satisfies these conditions, a set of continuous functions exists to which, by use of a proper Stieltjes-Lebesgue integral, the numbers  $c_{pqr}$  as before correspond. G. Szegő.

Menšov, D.: Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 295—299 (1937).

L'auteur démontre que pour toute fonction positive  $w(n)$ , vérifiant la condition  $w(n)/(\log n)^2 \rightarrow 0$  on peut déterminer un système normé de fonctions orthogonales  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , dans  $(0, 1)$ , qui sont uniformément bornées dans le même intervalle, et une suite des constantes  $c_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , telles que la série  $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x)$  diverge partout dans  $(0, 1)$  tandis que la série  $\sum_1^\infty w(n) c_n^2$  converge. N. Obrechhoff.

Saginjan, A. L.: Sur la théorie des polynômes orthogonaux à poids dans le plan de la variable complexe. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 425—428 (1937).

Soit dans le plan de la variable complexe  $x$  un domaine ouvert  $B$ , borné et simplement connexe, ayant une frontière commune avec le domaine contenant le point à l'infini. Soit  $q(x)$  une fonction régulière à l'intérieur de  $B$  et telle que  $\int_B |q(x)|^2 d\sigma < \infty$ .

Désignons par  $A_q$  la classe de fonctions  $f(x)$ , régulières à l'intérieur de  $B$  et telles que  $\int_B |q(x)|^2 |f(x)|^2 d\sigma < \infty$ . L'auteur donne des conditions pour qu'ils existent des polynômes  $\theta_n(x)$  tels que l'on a  $\int_B |q(x)|^2 |f(x) - \theta_n(x)|^2 d\sigma \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour chaque fonction de la classe  $A_q$ .

N. Obrechhoff (Sofia).



**Jacob, Mosé:** Sur la détermination du saut d'une fonction par le développement en série d'Hermite. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 103—105 (1937).

L'A. établit pour les développements en séries d'Hermite un théorème analogue à celui de Lukács et concernant les séries de Fourier: Si  $f(x)$  et  $e^{-\frac{x^2}{2}}|f(x)x^{-1}|$  sont intégrables respectivement pour  $|x| \leq a_1$ ,  $0 < a_2 \leq |x| \leq \infty$  et si  $f(x) \sim \sum c_\nu H_\nu(x)$ ,

$c_\nu = (2^\nu \nu! \pi^{\frac{1}{2}})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_\nu(u) du$ , on a en chaque point  $x = a$  où

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \int_0^h |f(a+t) + f(a-t) - D_a| dt = 0,$$

la relation suivante:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} \sum c_\nu \frac{H'_\nu(\alpha)}{\sqrt{\nu}} = (\sqrt{2}\pi)^{-1} D_a$ . Mandelbrojt.

## **Reihen:**

**Kozlov, V.:** Sur une relation entre la convergence absolue et l'unicité du développement trigonométrique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 417—420 (1937).

Toute série trigonométrique  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  qui converge presque partout, mais pas partout, vers zéro, ne peut posséder qu'un nombre fini de points de convergence absolue. La distance entre deux points quelconques de cette nature est commensurable avec  $\pi$ . A. Zygmund (Wilno).

**Gergen, J. J.:** Summability of double Fourier series. Duke math. J. 3, 133—148 (1937).

In this sequel to a recent paper by Gergen and Littauer (see this Zbl. 13, 162), Gergen begins (Part I) by considering the Riesz sums and Cesàro sums of a simple series  $\sum a_n$ , and obtains expressions for sums of each type in terms of those of the other (from which the equivalence of Riesz and Cesàro summability methods of order  $\alpha \geq 0$  can readily be obtained). Part II is concerned with the double Fourier series at  $(0, 0)$  of a function  $f(u, v)$   $L$ -integrable over  $(0, 0; 2\pi, 2\pi)$  and of period  $2\pi$  in each variable. In the paper cited the question was raised whether in Theorem VI of that paper the rôles of summability and continuity can be interchanged; more specifically, one might perhaps expect that "continuity  $(C; a, b)$  of  $f$ ", plus ultimate boundedness of the  $(C; \alpha, \beta)$ - or  $(R; \alpha, \beta)$ -transform ( $0 \leq \alpha < a - 2$ ,  $0 \leq \beta < b - 2$ ), would imply summability of the same type and order for  $\alpha, \beta$  sufficiently large. This is now shown to be false, but a result of the kind in question is established on the assumption of ultimate boundedness of the Riesz (or Cesàro) transforms of two different orders. C. R. Adams (Providence).

**Salem, Raphaël:** Sur une généralisation du procédé de sommation de Poisson. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 311—313 (1937).

L'auteur généralise quelques résultats obtenus dans la note précédente (C. R. Acad. Sci., Paris 205, ce Zbl. 16, 398). Soit  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  la série de Fourier d'une fonction sommable  $f(x)$ . Soient  $\psi_0(r), \psi_1(r), \dots$  des fonctions positives de  $r$ , formant une suite décroissante et positives quel que soit  $r$ ,  $0 \leq r < 1$ . Admettons que  $\lim_{r \rightarrow 1} \psi_p(r) = 1$  ( $p$  fixe) et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(r) = 0$  ( $r$  fixe inférieur à 1). Dans ces hypothèses, si  $x$  est un point de continuité de  $f$ , et si la série (\*)  $\frac{a_0}{2} \psi_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \psi_n(r)$  converge pour tout  $r < 1$ , on a (\*)  $f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r, x)$ , où  $f(r, x)$  désigne la somme de (\*). En particulier, si  $\psi_n(r) = O(1/\log n)$ , et si  $f(x)$  est partout continue, l'égalité (\*) a lieu partout (et même uniformément en  $x$ ). A. Zygmund (Wilno).



**Hyslop, J. M.:** A Tauberian theorem for absolute summability. J. London Math. Soc. 12, 176—180 (1937).

Eine Reihe  $\sum_0^\infty a_n$  heißt absolut  $A$ -summierbar, kurz  $|A|$ -summierbar, wenn  $f(s) = \sum_0^\infty a_n e^{-ns}$  in  $(0, \infty)$  schwankungsbeschränkt ist; sie heißt für  $k \geq -1$  absolut  $(C, k)$ -summierbar, kurz  $|C, k|$ -summierbar, wenn für die  $k$ . Cesàroschen Mittel  $c_n^{(k)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) der Folge ihrer Teilsummen  $\sum_0^\infty |c_{n+1}^{(k)} - c_n^{(k)}| < \infty$  gilt. — Das Hauptresultat der vorliegenden Note lautet: Ist  $\sum_0^\infty a_n$   $|A|$ -summierbar und  $\sum_0^\infty [(n+1)a_{n+1} - na_n]$  für ein  $k \geq 0$   $|C, k+1|$ -summierbar, so ist  $\sum_0^\infty a_n$  schon  $|C, k|$ -summierbar. Insbesondere gilt also der folgende Satz, der als Analogon des Tauberschen Satzes hinsichtlich absoluter Konvergenz angesehen werden kann: Ist  $\sum_0^\infty a_n$   $|A|$ -summierbar und  $\sum_0^\infty [(n+1)a_{n+1} - na_n]$  absolut konvergent, so ist  $\sum_0^\infty a_n$  absolut konvergent.

F. Lösch (Stuttgart).

**Ferrar, W. L.:** Summation formulae and their relation to Dirichlet's series. II. Compositio Math. 4, 394—405 (1937).

See this Zbl. 11, 66 for part I. — The author derives summation formulas related to certain classes of Dirichlet series. Let  $\psi(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ ,  $a_n$  real, converge absolutely for  $\sigma > 1$ . Let  $\psi(s)$  be analytic in  $-b \leq \sigma \leq 1$ ,  $b > 0$ , save for a finite number of poles none of which lie in  $-b \leq \sigma \leq 0$ , and let  $\psi(s)$  be of finite order,  $\leq K$ , in  $\sigma \geq -b$ . Put  $A(s) = \psi(s)/\psi(1-s)$  and assume that  $A(s)$  has no pole in  $-b \leq \sigma \leq \delta$ , and that  $|A(\sigma_1 + it)| = O(|t|^{-1-\eta})$ , where  $\delta$ ,  $\sigma_1$ , and  $\eta$  are fixed,  $> 0$ . Finally let  $A(s)$  be of finite order,  $\leq B$ , in  $-b \leq \sigma \leq \sigma_1$ . Let  $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi(s) x^{-s} ds$ ,  $0 < \sigma \leq 1+c$ ,  $c > 0$ , where  $\varphi(s)$  is analytic save for a simple pole of residue  $\varphi_0$  at  $s=0$  in  $-b \leq \sigma \leq 1+c (> \sigma_1)$ , and  $|\varphi(\sigma + it)| = O(|t|^{-\lambda})$ ,  $\lambda > \max(1, B, K)$ , in the same strip, and let  $A(-b+it)\varphi(-b+it)$  be integrable in  $(-\infty, \infty)$ . Put

$$\beta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} A(s) y^{s-1} ds.$$

For such functions  $f(x)$ , which is a fairly general class, the author proves the summation formula

$$-\psi(0)f(+0) + \sum_{n=1}^\infty a_n f(n) = (R) + \sum_{n=1}^\infty \left\{ -\frac{1}{n} A(0)\varphi_0 - \theta_n + \int_0^\infty f(x)\beta(nx)dx \right\}.$$

Here  $(R)$  is the sum of the residues of  $\varphi(s)\psi(s)$  at the poles of  $\psi(s)$  other than  $s=0$  and  $\theta_n$  is the sum of the residues of  $\varphi(s)A(s)n^{s-1}$  at the poles of  $A(s)$  in  $(\delta, \sigma_1)$ . — Interesting special cases and generalizations.

E. Hille (New Haven, Conn.).

**Toscano, Letterio:** Sulla somma di alcune serie. Boll. Un. Mat. Ital. 16, 144—149 (1937).

Es werden Polynome  $A_r^{(u)}$  und  $B_r^{(u)}$  eingeführt, die als Verallgemeinerung der vom Verf. öfter benutzten Zahlen  $A_r$ , (dies. Zbl. 13, 198) angesehen werden können. Sie dienen zur Bestimmung der Summen gewisser Reihen und zur Darstellung gewisser Differentialoperatoren. Die Darlegungen berühren sich mit verschiedenen früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 8, 203; 10, 62; 14, 66).

L. Schrutka (Wien).



### Spezielle Funktionen:

**Bijl, Jan:** Anwendungen der Methode der stationären Phase. Groningen: Diss. 1937. 106 S.

Der Verf. gibt die Ableitungen der schon früher angezeigten asymptotischen Entwicklungen der Besselschen Funktionen unter Benutzung der Methode der stationären Phase (s. dies. Zbl. 15, 344). Er findet u. a.:

$$\left| J_z(x) - \frac{1}{3\pi} \sum_{h=0}^{M-1} \frac{B_h}{h!} \left(\frac{6}{x}\right)^{\frac{h+1}{3}} \Gamma\left(\frac{h+1}{3}\right) \sin \frac{2h+2}{3}\pi \right| \leq \frac{C_1}{w^M},$$

wo  $M$  ganz  $\geq 0$ ,  $|z-x| \leq x^{\frac{1}{3}}$ ;  $C_1$  (und später  $C_2$ ) ist eine geeignet gewählte positive höchstens von  $M$  abhängige Zahl. — Für die Koeffizienten  $B_h$  ( $h$  ganz  $\geq 1$ ) gilt die folgende rekurrente Beziehung:

$$B_h = (z-x) B_{h-1} - \sum_{\substack{4 \leq q \leq h-1 \\ q \text{ gerade}}} \binom{h-1}{q} x \cdot B_{h-q-1}; \quad B_0 = 1.$$

$$w = x^{\frac{1}{3}} \text{ für } |z-x| < x^{\frac{1}{3}} \\ = x^{\frac{1}{3}} |z-x|^{-1} \text{ für } x^{\frac{1}{3}} \leq |z-x| \leq x^{\frac{1}{3}}.$$

Analoge Ergebnisse für  $Y_z(x)$ . — Für  $x \geq 1$  findet er

$$\left| Y_z(x) - \Im \frac{e^{i(x-\frac{\pi}{2})}}{\pi} \sum_{h=0}^{M-1} \frac{G_{2h}}{2h!} \left(\frac{2i}{x}\right)^{\frac{2h+1}{2}} \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right) \right| \leq \frac{C_2}{x^{\frac{M+1}{2}}};$$

$$G_0 = 1; \quad G_{2h-1} = 0; \quad G_{2h} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{2h-1} \binom{2h-1}{k} \left\{ \frac{d^k}{dy^k} (z \operatorname{tgh} zy + i x \operatorname{sh} y - i x y) \right\}_{y=0} G_{2h-k-1}.$$

Analoge Ergebnisse für  $Y_z(x)$  und  $K_z(x)$ . S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

**Shabde, N. G.:** On some results involving Legendre functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 33—40 (1937).

The author evaluates some integrals involving Legendre functions. A typical formula is

$$\int_1^\infty P_p(\mu) Q_q(\mu) P_n(\mu) d\mu \\ = \sum_{r=0}^p \frac{(\frac{1}{2})_r (\frac{1}{2})_{p-r} (\frac{1}{2})_{q-p+r+1} (q+r)!}{r! (p-r)! (q-p+r)! (\frac{1}{2})_{q+r+1}} \left( \frac{2q-2p+4r+1}{2q-2p+2r+1} \right) \times \frac{1}{(q-p+2r-n)(q-p+2r+n+1)},$$

where  $q > p$ ,  $p$  and  $q$  are integers, and either (I)  $n$  is positive and not an integer, or (II)  $n < q-p$  or  $n > q+p$  if  $n$  is an integer. Another result obtained is

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\lambda Q_\mu^{m+\lambda}(z) (z^2-1)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\lambda+\mu+n+\frac{1}{2})(\lambda)_n}{n! \Gamma(\mu+n+\frac{1}{2})} (\lambda+\mu+\frac{1}{2}+2n) Q_{\lambda+\mu+2n}^m(z).$$

W. N. Bailey (Manchester).

**Varma, R. S.:** Operational representation of the parabolic cylinder functions. II. Philos. Mag. 23, 926—928 (1937).

Ausgehend von der Darstellung des Quadrates einer Weberschen Funktion als endliche Summe anderer Weberscher Funktionen leitet Verf. unter Verwendung der operatorischen Formel für eine Webersche Funktion eine einfache operatorische Summendarstellung für das Quadrat einer Weberschen Funktion ab. In analoger Weise beweist Verf. eine Formel, welche eine Webersche Funktion des Differentialoperators durch eine endliche Summe von Weberschen Funktionen operatorisch darstellt. Unter Benutzung des Parsevalschen Satzes in der von S. Goldstein angegebenen Form



leitet Verf. zwei unendliche Integralformeln ab, wobei der Integrand in der ersten Formel das Produkt einer Weberschen Funktion, einer Exponentialfunktion und einer Potenz ist, in der zweiten Formel das Produkt zweier Weberscher Funktionen, einer Exponentialfunktion und einer Potenz. (I. vgl. dies. Zbl. 16, 398.) *M. J. O. Strutt.*

**Meijer, C. S.:** Über Produkte von Whittakerschen Funktionen. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 40, 259—263 (1937).

In this part of the paper (I. cf. this Zbl. 16, 252) integral representations are given for the products

$$D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i})D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}), \quad D_n(z)\{D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) \pm D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\},$$

$$\{D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) - D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\} \{D_{-n-1}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) + D_{-n-1}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\}$$

and

$$\{D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) - D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\} \{D_{-n-1}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) - D_{-n-1}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\},$$

where  $D_n(z)$  is the parabolic cylinder function. For example, if  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  and  $R(n) < 0$ ,

$$D_n(z)\{D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) + D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i})\} = \frac{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty J_{-n-\frac{1}{2}}(u^2) e^{-zu} \cos zu \, du,$$

and, if  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  and  $R(n) < 0$ ,

$$D_n(ze^{\frac{1}{2}\pi i})D_n(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-n)} \int_L u^{-n-\frac{1}{2}} (z + \frac{1}{2}u)^{n+\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(zu + \frac{1}{2}u^2) \, du,$$

where  $L$  is a curve in the  $u$ -plane joining the points 0 and  $\infty - z$ . When  $z > 0$ ,  $L$  is the positive real axis.

*W. N. Bailey (Manchester).*

**Bailey, W. N.:** A new proof of Dixon's theorem on hypergeometric series. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 113—114 (1937).

Das Theorem wird aus einer Beziehung, die zwischen benachbarten hypergeometrischen Reihen besteht, hergeleitet.

*v. Koppenfels (Hannover).*

**Košliakov, N. S.:** On a transformation of definite integrals and its application to the theory of Riemann's function  $\zeta(s)$ . C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 3—8 (1937).

Verf. gibt verschiedene neue Integraldarstellungen von  $\zeta(s)$ , z. B.:

$$\frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty F(s, \alpha x) \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+x) - \log x\right) dx$$

$$+ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1-s}{2}} \int_0^\infty F(1-s, \beta x) \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+x) - \log x\right) dx,$$

wo  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha\beta = \pi$ ,

$$F(s, x) = \pi^{-1} s(1-s) \sin \pi s \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!(s+2n)}.$$

*Hans Heilbronn (Cambridge).*

**Bruijn, N. G. de:** Integraldarstellungen für die Riemannsche Zetafunktion. Mathematica, Zutphen B 5, 170—180 (1937) [Holländisch].

Der Verf. gibt elementare Ableitungen der bekannten Integralformeln:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} \right\} y^{s-1} dy, \quad (0 < \Re(s) < 1)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \log(1+x) - \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} \right\} \frac{dx}{x^2} \quad (0 < \Re(s) < 1)$$

(H. D. Kloosterman, Christiaan Huygens II, S. 172—177)

$$\zeta(1+s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s} \int_0^\infty \frac{d^2 \log \Gamma(1+x)}{dx^2} \frac{dx}{x^2} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma''(1+x)}{\Gamma(1+x)} + C \right\} \frac{dx}{x^{1+s}} \quad (0 < \Re(s) < 1)$$



( $C$  = Eulersche Konstante) und allgemein:

$$\zeta(m+s) = (-1)^{m-1} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(m+s)} \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^{m+1} \log \Gamma(1+x)}{dx^{m+1}} \frac{dx}{x^s}. \quad (0 < \Re(s) < 1)$$

Weiter noch:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{\sin \pi s}{\pi(1-s)} \int_0^\infty \left\{ \frac{d^2 \log \Gamma(1+x)}{dx^2} - \frac{1}{1+x} \right\} \frac{1}{x^{s-1}} dx. \quad \left( \begin{array}{l} 0 < \Re(s) < 2 \\ s \neq 1 \end{array} \right)$$

Endlich gibt er einen elementaren Beweis der Riemannschen Funktionalgleichung:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s).$$

S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

### Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Hukuhara, Masuo: Sur les équations fonctionnelles contenant un paramètre. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 5, 107—122 (1937).

a) Beweisanordnung für die Differenzierbarkeit nach dem Parameter der Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung  $(1) \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$  im abgeschlossenen wie auch im offenen Intervall  $\langle 0, a \rangle$  der  $x$ -Variable. Das letzte, falls die Lösungen  $\varphi(x, \lambda)$  für  $0 < x \leq a$  die Form  $\varphi(x, \lambda) = \varphi(x, 0) + o\tau(x)$  besitzen. Hier bedeutet  $o$  das Landausche Symbol und  $\tau(x)$  ist eine Funktion, die durch Abschätzungen für  $|f_y|$ ,  $|f_\lambda|$  in  $0 < x \leq 0$ ,  $|y - \varphi(x, 0)| \leq B(x)$  bestimmt ist. b) Sei  $(2) y = x + F(x, t)$  eine in einem beschränkten Gebiete  $G$  eines linearen, normierten und vollständigen Raumes  $B$  erklärte Schar von Funktionaloperationen, wobei  $F$  in  $x \in B$  vollstetig und in  $A$  gleichmäßig stetig ist. Ist in  $y = 0$  der Abbildungsgrad von  $(2)$  für ein beschränktes Kontinuum  $\Gamma$  der komplexen  $A$ -Ebene von Null verschieden, dann gibt es im Produktraume  $x \times t$  ein Kontinuum der „Lösungen“ von  $(3) 0 = x + F(x, t)$ , längst welchem jeder  $t$ -Wert von  $\Gamma$  angenommen wird (Verallgemeinerung eines Satzes aus der Arbeit von Leray-Schauder; dies Zbl. 9, 73). c) Die Differenzierbarkeit der Lösungen von  $(3)$  wird, unter gewissen Voraussetzungen für  $F(x, t)$ , bewiesen. Schauder (Lwów).

Koksma, Jan: Asymptotische Auflösung von linearen und verwandten Differentialgleichungen. Groningen: Diss. 1937. 143 S.

Perron hat 1913 die Frage beantwortet nach dem asymptotischen Verhalten der Lösungen der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu y^{(\nu)}(x) = g(x); \quad a_n = 1, \quad (1)$$

wo  $g(x)$  stetig ist für  $x \geq x_0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$ . Wenn die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu = 0; \quad a_n = 1 \quad (2)$$

alle reell  $\neq 0$  sind, hat er u. a. gefunden, daß (1) ein Integral  $y(x)$  besitzt mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{b}{a_0}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y^{(k)}(x) = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

[J. reine angew. Math. 142, 254—270 (1913)]. Späth hat 1929 die beschränkenden Voraussetzungen über die Nullstellen von (2) teilweise aufgehoben [Math. Z. 30, 487 bis 513 (1929)]. Im Anschluß an diese letzten Untersuchungen betrachtet der Verf. die Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu y^{(\nu)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}), \quad a_n = 1, \quad (3)$$

unter der Voraussetzung, daß (2) die Nullstellen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  besitzt mit den Multiplizitäten  $m_1, m_2, \dots, m_r$ . Wenn (3) ein Integral  $\eta(x)$  besitzt mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}) = b, \quad (= 0 \text{ für } a_0 = 0),$$

und wenn

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu \varphi^{(\nu)}(x) = f(x, \eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}) \quad (4)$$



gewissen Bedingungen genügt, findet er (Satz I), daß (4) wenigstens ein Integral  $\psi(x)$  besitzt mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \frac{b}{a_0}, \quad (= 0 \text{ für } a_0 = 0); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi^{(\nu)}(x) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

$\eta(x)$  hat die Form  $\eta(x) = \psi(x) + \sum_{\varrho=1}^r P_{\varrho}(x) e^{\alpha_{\varrho} x}$ .  $P_{\varrho}(x)$  ist ein geeignet gewähltes Polynom vom Grade  $\leq m_{\varrho} - 1$  ( $1 \leq \varrho \leq r$ ). In Satz II wird unter weiteren einschränkenden Bedingungen, unter Anwendung einiger van der Corpusterscher Hilfssätze bei gewisser Wahl der Polynome  $P_{\varrho}(x)$  die Existenz wenigstens eines Integrals  $y(x)$  der Gleichung (3) erwiesen mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ y(x) - \sum_{\varrho=1}^r P_{\varrho}(x) e^{\alpha_{\varrho} x} \right\} = \frac{b}{a_0} \quad (= 0 \text{ für } a_0 = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ y^{(\nu)}(x) - \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \sum_{\varrho=1}^r P_{\varrho}(x) e^{\alpha_{\varrho} x} \right\} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

Diese Ergebnisse werden weiter u. a. ausgedehnt auf den Fall veränderlicher Koeffizienten  $a_{\nu}(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_{\nu}(x) = a_{\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n; a_n = 1$ ). Kap. V bringt mehrere Anwendungen dieser Methode auf spezielle Fälle, z. B.:  $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{a^2 w}{z - bw}$  ( $a > 0, b$  beliebig)

oder mit  $w = x^{\frac{1}{2}} y$ ;  $z = \frac{x^2}{16a^2}$ :  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4x^2} \right) y = \frac{4a^2 b y^2}{x^{\frac{1}{2}} - 16a^2 b y}$  (4). Der Verf. findet,

wenn  $A$  eine beliebige Konstante  $\neq 0$  bedeutet, daß (4) wenigstens ein Integral  $y(x)$  besitzt mit  $y(x) - A \cdot u(x) \sim \frac{4pA^2}{3} e^{-x} \sum_{\lambda=1}^{\infty} r_{\lambda} x^{-\lambda-\frac{1}{2}}$ , wo  $p = 4a^2 b$ ;

$$u(x) \sim e^{-\frac{x}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{1 - (\frac{1}{2})^2\} \{1 - (\frac{3}{2})^2\} \dots \{1 - (n - \frac{1}{2})^2\}}{n! x^n} \right\}. \quad (5)$$

Die Koeffizienten  $r_{\lambda}$  können aus (5) berechnet werden; sie sind unabhängig von  $A$  und vom gewählten Integral  $y(x)$ . *S. C. van Veen* (Dordrecht, Holl.).

**Bouligand, Georges:** Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre infiniment voisines d'une équation non intégrable aux différentielles totales. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 251—266 (1937).

Die Differentialgleichung (1)  $f(x, y, z, p, q; m) = 0$  möge von einem Parameter  $m$  abhängen derart, daß für  $m \rightarrow 0$  der Elementarkegel gegen eine Ebene strebt, die durch (2)  $a dx + b dy + c dz = 0$  gegeben ist. Es wird zunächst mit möglichst topologischen Methoden die Möglichkeit der Reduktion von (2) auf die Form  $dZ - Y dX = 0$  untersucht; weiter wird gezeigt, daß sich die Integralfächen von (1), die eine feste Orthogonaltrajektorie des Feldes  $(a, b, c)$  enthalten, für  $m \rightarrow 0$  auf diese zusammenziehen. Ähnlich wird auch das Verhalten der einzelnen Charakteristiken eingehend studiert. Unter einem Integral von (1) wird dabei eine Fläche verstanden, deren Paratingens überall mit einer Tangentialebene an den Elementarkegel zusammenfällt.

*W. Feller* (Stockholm).

**Pfeiffer, G. V.:** Sur la possibilité d'adjoindre à un système complet d'équations non linéaires une équation linéaire, un système d'équations linéaires. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 15, 167—168 (1937).

Extension pour les systèmes non linéaires des résultats cités dans ce Zbl. 15, 209.

*Janczewski* (Leningrad).

### **Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

**Lebesgue, Henri:** Sur la méthode de Carl Neumann. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 16, 205—217 (1937).

Il s'agit de la méthode pour résoudre les problèmes de Dirichlet relatifs aux



domaines convexes. Le raisonnement de Neumann, pour prouver un certain lemme, est faux, et la faute est précisément de même nature que celle que Weierstrass découvrit dans le raisonnement de Riemann, relatif au problème de Dirichlet: une confusion entre borne inférieure et minimum. Le lemme de Neumann est pourtant exact; l'aut. le démontre en généralisant un raisonnement que Neumann lui-même appliqua à l'ellipsoïde et à l'ellipse; l'aut. montre aussi que la restriction, énoncée par Neumann, que le domaine ne doit pas être biétoilé, est nécessaire, car sans cette restriction le lemme serait inexact. Enfin l'aut. établit un lemme, différent de celui de Neumann, et d'où résulte que, pour tout domaine convexe, même biétoilé, la série de Neumann converge à la façon d'une progression géométrique *Giraud*.

**Maggi, G. A.:** Sulla derivate tangenziali della funzione potenziale di superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 293—296 (1937).

Allgemeine Bemerkungen über die Grenzwerte der partiellen Ableitungen 1. Ordnung eines Oberflächenpotentials bei Annäherung an einen Punkt der Fläche, mit besonderer Berücksichtigung der tangentiellen Ableitungen. *G. Cimmino* (Napoli).

**Vasileseo, Florin:** Sur une application des familles normales de distributions de masse. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 212—215 (1937).

Après avoir rappelé qu'une distribution de masse est, par définition, une fonction complètement additive d'ensemble (il n'y a donc pas nécessairement une densité en chaque point), l'aut. emploie cette notion pour démontrer que toute fonction nulle à l'infini et harmonique dans tout l'espace sauf sur une certaine courbe rectifiable, au voisinage de laquelle cette fonction est bornée inférieurement, mais non supérieurement, est le potentiel d'une distribution de masse positive sur la courbe. La courbe peut être remplacée, dans l'énoncé, par un ensemble fermé et borné, dont la capacité soit nulle. Autre énoncé, relatif aux fonctions harmoniques dans un domaine borné, sauf aux points d'un ensemble de capacité nulle. *Georges Giraud*.

**Artmeladze, N.:** Über die Lösung des Dirichletschen Problems für die Schwingungsgleichung bei unstetigen Randwerten. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 205—206 u. deutsch. Zusammenfassung 206 (1937) [Georgisch].

Verallgemeinerung einiger Resultate von Kupradze (dies. Zbl. 11, 405) auf den Fall von ungünstigen Randfunktionen. Mit Hilfe einer Speziallösung, welche auf dem Rand dieselben Unstetigkeiten wie die Randfunktion besitzt, wird das Problem auf den Fall der stetigen Randwerte zurückgeführt. *Janczewski* (Leningrad).

**Langer, Rudolph E.:** On the connection formulas and the solutions of the wave equation. Physic. Rev., II. s. 51, 669—676 (1937).

If in the equation  $u'' + Q^2(x)u = 0$  the function  $Q^2(x)$  has a zero  $x_1$  of order  $n = -2 + 1/m$  which is a turning point at which the kinetic energy changes sign approximation functions of type

$$U(x; a, b) = S(x)\{a t^m J_{-m}(t) + b t^m J_m(t)\}$$

which satisfy the equation  $U'' + \{Q^2(x) - P(x)\}U = 0$  are superior to the usual approximation functions because they are single valued instead of being many valued

near the turning point. The variable  $t$  is given by the equation  $t = \int_{x_1}^x Q dx$  and

$P(x) = S''(x)/S(x)$  where  $S(x) = Q^{-1/2}(x) t^{1-m}$ . The method is compared with those used by previous investigators and the applications to the equations of quantum theory are clearly discussed. *H. Bateman* (Pasadena).

**Sakurai, Tokio:** On the propagation of waves. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 297—328 (1937).

This paper discusses the equation

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2D \frac{\partial u}{\partial t} + 2E \frac{\partial u}{\partial x} + Fu = 0$$

for the case where the characteristics, defined by  $C(dt)^2 - 2B dt dx + A(dx)^2 = 0$ , are two real straight lines. Under this restriction and with proper change of variables, the solution may be written in the form  $u(x, t) = U(t)V(x)$ , where  $U(t)$  and  $V(x)$  satisfy two ordinary linear differential equations of second order. The solution of the original equation is then discussed by means of contour integrals and the nature of the waves under various general boundary conditions is determined. Special application of the theory is then made to the ordinary wave equation and to the equation of telegraphy. — Waves over a finite interval are discussed for boundary conditions of the form  $(\Phi_1 V)_{x=0} + (\Psi_1 V)_{x=l} = 0$ ,  $(\Phi_2 V)_{x=0} + (\Psi_2 V)_{x=l} = 0$ ,

where the  $\Phi_i$  and  $\Psi_j$  are linear differential operators of at most first order. *Davis.*

**Kupradze, V.:** Die elektromagnetische Wellenausbreitung in nichthomogenen Medien. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 115—122 u. deutsch. Zusammenfassung 123 (1937) [Deutsch].

L'auteur étudie en détail les résultats énoncés dans une note antérieure (ce Zbl. 13, 205). — Voir un travail parallèle de Sternberg (ce Zbl. 14, 310). *Janczewski.*

**Backer, S. de:** Les fluides visqueux et les ondes propagables. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 59—72 (1937).

This is a continuation of previous work (see this Zbl. 16, 258). For a gas containing only one kind of molecule consisting of one atom 6 equations are obtained by giving special forms to the tensor representing the effect in Jeans' equations of transport of the effect of molecular collisions and the symmetric tensor of the third rank which also occurs in these equations. By making certain approximations the new set of hydrodynamical equations which includes the new six complementary equations can be reduced to the Stokes-Navier form. The paper closes with a discussion of the energy relations. The first law of thermodynamics is expressed in the usual form and so also is the law of heat conduction provided the quantities  $a$  and  $b$  in the new equations are such that  $a = 1, 2a + 5b = 0$  and the temperature is introduced by means of the physical law of perfect gases  $p = RT$ . *H. Bateman (Pasadena).*

### Integralgleichungen, Integraltransformationen:

**Germa, R. H. J.:** Sur les intégrales infiniment voisines d'une équation intégrale différentielle normale dont les termes intégraux contiennent la dérivée de l'inconnue. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 97—101 u. 135—138 (1937).

**Germa, R. H. J.:** Sur les solutions infiniment voisines des systèmes d'équations intégrales différentielles normales dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 138—142 et 155—159 (1937).

Der bekannte Satz über die stetige Abhängigkeit der Integrale einer Differentialgleichung von einem in der Gleichung vorkommenden Parameter wird auf den Fall einer Integrodifferentialgleichung verallgemeinert. Weitere Verallgemeinerung auf den Fall eines Gleichungssystems. *G. Cimmino (Napoli).*

**Cassina, U.:** Su di un'equazione integro-differenziale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 301—308 (1937).

Verf. betrachtet eine besondere Integro-Differentialgleichung, die sich auf eine gewöhnliche lineare Integralgleichung 2. Art ohne Eigenwerte leicht zurückführen läßt, und gibt einige einfache Formeln für die iterierten und den auflösenden Kern. *G. Cimmino (Napoli).*

**Mandelbrojt, Szolem:** Sur l'équivalence de deux classes de fonctions de Paley et Wiener. C. R. Acad. Sci., Paris 204, 1860—1863 (1937).

Putting  $T_m(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|r|^n}{m_n}$  ( $|r| > 0$ ), and denoting by  $C^*\{m_n\}$  the class of functions infinitely differentiable in  $-\infty < x < \infty$  for which  $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|^2 dx \leq k^{2n} m_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = k(f)$ , the author makes two statements: I.  $f(x)$  belongs to  $C^*\{m_n\}$



if and only if for some  $\alpha > 0$  the Fourier transform  $g(u)$  of  $f(x)$  satisfies  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u) T_m(\alpha u)|^2 du < \infty$ .

II.  $C^*\{m_n\}$  is contained in  $C^*\{m_n\}$  if and only if for some  $\alpha > 0$ ,  $T_{m'}(r) > T_m(\alpha r)$ ,  $r \geq r_0$ . — The Plancherel theory greatly facilitates the proofs of theorems on quasi-analytic functions of this type.

Bochner (Princeton).

**Ignatovskij, V. S.: Zur Laplace-Transformation. V—VIII.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 14, 475—478, 15, 67—70, 163—165 u. 231—234 (1937).

For the earlier notes see this Zbl. 11, 256, 15, 22, 303 and 16, 259. — Note V contains some reflections on the inversion problem of the Laplace transformation. — In Note VI the author considers the equation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + mu = \varphi(x, y, t), \quad (1)$$

three of the boundary values  $u(0, y, t)$ ,  $u(x, y, 0)$ ,  $u_x(0, y, t)$ , and  $u_t(x, y, 0)$  being given. A bilateral Laplace transformation with respect to  $y$  reduces this problem to that considered in Note I. The resulting solution is not completely given. — In Note VII the author discusses the ordinary two-dimensional wave equation with the boundary condition  $u(0, y, t) = \sin \omega t \psi(y)$ , where  $\psi(y) = 0$  if  $|y| > a$  and  $= 1$  if  $|y| < a$ . The solution of Note VI takes on a simple and elegant form in this special case. — In Note VIII the author deals with a three-dimensional problem, the corresponding

equation being obtained by inserting the term  $-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  on the left in (1) and replacing  $\varphi(x, y, t)$  by  $\varphi(x, y, z, t)$ . A bilateral Laplace transformation with respect to  $z$  reduces the problem to that of Note VI.

E. Hille (New Haven, Conn.).

**Amerio, L.: Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 205—213 (1937).

The product integral

$$F(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T,$$

exists for almost all  $t$ , if  $F_1$  and  $F_2 \in L(0, T)$ , and then  $F \in L(0, T)$ . — This product is associate under the same assumptions. — If  $F_1$  and  $F_2$  belong to  $L(0, T)$  for every  $T$  and if the Laplace transforms  $L(F_1)$  and  $L(F_2)$  converge for a value  $z = z_0$ , one of them absolutely, then  $L(F_1 * F_2)$  converges for the same value and  $L(F_1 * F_2) = L(F_1) L(F_2)$ . (For this analogue of Mertens' theorem see a more general theorem by Hille and Tamarkin, this Zbl. 9, 158.) — If there exists an interval  $0 < t < \delta$  in which  $F(t) \geq 0$  and  $>$  holds in a set of positive measure, then  $L(F)$  cannot have infinitely many zeros in any strip  $x > -a > \infty$ ,  $b_1 < y < b_2$ . Generalizations. Hille.

## **Funktionalanalysis, Funktionalräume:**

**Martini, Biddau, Silvia: Sulle funzioni di operatori lineari. I.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 214—219 (1937).

Il problema trattato consiste nella ricerca di un metodo per istituire un calcolo di funzioni di operatori lineari, più generale di quello dovuto al Fantappiè [cfr. I funzionali analitici. Mem. Accad. Ital., s. VIa. 3 (1928/30); e questo Zbl. 8, 17]. L'operatore lineare  $A$  muti ogni funzione  $y(t)$  di un campo funzionale lineare  $H$  in una funzione  $y_1(t)$ . — Se  $\alpha$  è un parametro complesso variabile in un campo  $B$  connesso comprendente il punto all'infinito, si considera l'equazione in  $y$

$$A y - \alpha y = y. \quad (E)$$

Il Fantappiè ha mostrato che se la (E) ammette una sola soluzione  $y(\alpha, t)$  appartenente ad  $H$ , quando  $\alpha$  appartiene a  $B$  ed analitica regolare in  $B$ , è possibile istituire un calcolo di operatori  $f(A)$ , dove  $f(\lambda)$  è una qualunque funzione analitica di un campo funzionale  $\Phi$ . — L'Autrice dà una nuova definizione di  $f(A)$ , prendendo le mosse da una serie di potenze di  $\alpha$

$$\bar{y}(\alpha, t) = \sum_0^{\infty} \alpha^n A^n y,$$

dove  $A^n y$  è il risultato dell' $n$ -mo operatore iterato di  $A$  applicato ad  $y$ . — Sotto l'ipotesi della convergenza di questa serie in un intorno di  $\alpha = 0$ , si porrà

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) \frac{1}{\lambda} \bar{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda}, t\right) d\lambda,$$

dove il cammino d'integrazione è scelto opportunamente. Per ogni  $f(\lambda)$  di  $\Phi$  quest'operatore lineare fa corrispondere ad ogni funzione  $y$  di  $H$  una funzione dello stesso campo. — Il progresso sul metodo del Fantappiè consiste in ciò che la nuova definizione di  $f(A)$  è applicabile anche quando l'equazione (E) ammetta più soluzioni. *G. Lampariello.*

**Martis in Biddau, Silvia:** Sulle funzioni di operatori lineari. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 255—260 (1937).

In questa seconda Nota (vedi sopra) si dimostra che la definizione adottata per le funzioni di un operatore lineare soddisfa alle proprietà necessarie per la istituzione di un calcolo simbolico. Tutto è subordinato alla serie

$$\bar{\gamma}(\alpha, t) = \sum_n a^n A^n y = L_\alpha y,$$

sotto la condizione fondamentale che questa converga in un intorno di  $\alpha = 0$  per ogni  $y$  di  $H$  e che, considerata come operatore applicato ad  $y$ , sia analitica insieme con i suoi prolungamenti nei parametri che intervengono in  $y$ . — Poichè la funzione  $\bar{\gamma}(\alpha, t)$  può risultare polidroma in  $\alpha$ , così si hanno per qualche valore di  $\alpha$  più funzioni di  $H$  che soddisfano all'equazione (E)  $A\gamma - \alpha\gamma = y$ . In questo caso il metodo del Fantappiè non sarebbe applicabile. *G. Lampariello (Roma).*

**Kitagawa, Tosio:** On the theory of linear translatable functional equations and Cauchy's series. Jap. J. Math. 13, 233—332 (1937).

Die Arbeit enthält eingehende Untersuchungen über eine abstrakt definierte umfassende Klasse linearer Funktionalgleichungen, die zahlreiche von vielen Autoren behandelte besondere Gleichungsklassen einschließt, so u. a. funktionale Differentialgleichungen, Differenzgleichungen, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung — alle mit konstanten Koeffizienten — und gewisse singuläre Integralgleichungen. „Translatable operator“ heißt ein für einen gewissen Funktionenbereich, z. B. für die für alle reellen  $t$  definierten integrierbaren Funktionen  $f(t)$ , erklärtes lineares Funktional  $A[x, f(t)]$ , das mit jeder Translation der Unabhängigen vertauschbar ist, d. h. für das  $A[x + \tau, f(t)] = A[x, f(t + \tau)]$  oder  $A[x, f(t)] = A[0, f(t + x)] = A f(x)$  ist (die Volterra'sche condition du cycle fermé), und das obendrein in ähnlichem Sinne mit der Lebesgueschen bestimmten Integration vertauschbar ist. Als maßgebend für das Verhalten des Operators erweist sich seine „erzeugende Funktion“  $G(\lambda) = e^{-\lambda x} A[x, e^{\lambda t}] = A[0, e^{\lambda t}]$ . In den ersten Kapiteln (I—III) werden Operatoren  $A$  mit ganzen  $G(\lambda)$  betrachtet sowie aus endlich vielen solchen  $A_k$  und Differentiationen zusammengesetzte Operatoren  $\Gamma f(x) = \sum A_k f^{(k)}(x)$ . Lösungen der Funktionalgleichungen  $\Gamma f(x) = 0$  werden nun als Limites von Integralen über Folgen geeigneter  $\lambda$ -Kurven dargestellt, deren Integranden Exponentialfunktionen sowie die Operatoren  $A_k$  im Zähler und  $G(\lambda)$  im Nenner enthalten; dabei sind gewisse Annahmen über das infinitäre Verhalten von  $G(\lambda)$  in bezug auf jene Kurvenfolgen zu machen, und es ist eine Reihe von Hilfsätzen über solche Integrale vorzuschicken. Die so entstehenden Entwicklungssätze werden unter besonderen Annahmen über  $f(x)$  (z. B. Analytizität) näher untersucht sowie auf verschiedene konkrete Fälle angewendet. Weiterhin werden Analoga zu bekannten Sätzen der Reihentheorie (Eindeutigkeit der Koeffizienten, Parseval'scher Satz u. dgl.) entwickelt. In Kap. IV werden Operatoren im Bereich von Funktionen  $f(t)$  bestimmten infinitären Verhaltens untersucht, deren  $G(\lambda)$  nur noch in einer Halbebene  $\Re(\lambda) < \sigma$  oder nur in einem Streifen  $\sigma_1 < \Re(\lambda) < \sigma_2$  als definiert und regulär vorausgesetzt wird. In Kap. V endlich wird die Nörlundsche Theorie der Differenzgleichungen auf  $\Gamma f(x) = g(x)$  übertragen, insbesondere der Begriff der



Hauptlösung; dabei werden sinngemäße Verallgemeinerungen der Bernoullischen Polynome und der Euler-Maclaurinschen Reihe für diese Funktionalgleichung entwickelt.

*Hellinger* (Frankfurt a. M.).

**Friedrichs, Kurt:** On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. I. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 321—364 (1937).

Der erste Teil dieser Arbeit handelt von dem Raum  $\mathfrak{A}$  der analytischen Funktionen  $w(z)$ , die in einem offenen, zusammenhängenden und beschränkten Gebiet  $G$  der  $z = x + iy$ -Ebene regulär sind und für die

$$\iint_G |w|^2 dx dy$$

endlich ist. Insbesondere wird die Spektralzerlegung der quadratischen Form  $\iint_G w^2 dx dy$  in bezug auf die Einheitsform  $\iint_G |w|^2 dx dy$  durchgeführt. Dabei ergibt sich die

Existenz einer Folge von Eigenwerten  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , die monoton gegen Null konvergiert und einer Folge von Eigenfunktionen  $w_n(z)$  mit  $\iint_G \bar{w}_m w_n dx dy = \delta_{mn}$ , für die gilt:

Jede Funktion aus  $\mathfrak{A}$  kann in eine Reihe  $w(z) = \sum c_v w_v(z)$  entwickelt werden, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von  $G$  gleichmäßig konvergiert; außerdem gelten die Relationen

$$\iint_G |w|^2 dx dy = \sum |c_v|^2, \quad \iint_G w^2 dx dy = \sum \mu_v c_v^2. \quad (*)$$

Mit diesem Satz hängt eine Ungleichung zusammen, die auch für sich genommen bemerkenswert ist: Es gibt eine Zahl  $\theta < 1$ , so daß für alle  $w$  aus  $\mathfrak{A}$ , für die  $\int \int w dx dy = 0$  ist, die Ungleichung

$$\left| \iint_G w^2 dx dy \right| \leq \theta \iint_G |w|^2 dx dy \quad (**)$$

erfüllt ist. Für die Gültigkeit dieser Sätze wesentlich sind die Voraussetzungen über den Rand des Gebietes  $G$ . Er soll aus einer endlichen Anzahl von geschlossenen Kurven bestehen, deren Tangenten, abgesehen von endlich vielen Ecken, stetig sind. Unter dieser Voraussetzung gilt die Ungleichung (\*\*), während der Entwicklungssatz (\*) nur gilt, wenn keine Ecken außer inneren Spitzen auftreten. Für Kreis und Ellipse werden Eigenwerte und Eigenfunktionen explizit angegeben. Für einen Rand mit Ecken wird die obere und untere Grenze des Häufungsspektrums der Form  $\iint_G w^2 dx dy$

angegeben. — Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem Hilbertschen Raum  $\mathfrak{R}$  der komplexwertigen Funktionen  $k(x, y)$ , für die

$$(k|k) = \frac{1}{2} \iint_G \left\{ \left| \frac{\partial k}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial k}{\partial y} \right|^2 \right\} dx dy$$

endlich ist, und insbesondere mit den Beziehungen dieses Raumes zu seinem Unterraum  $\mathfrak{A}$ . Die zahlreichen Einzelresultate können hier nicht referiert werden. Angeführt sei die Ungleichung

$$\sigma \cdot (k|k) \leq \iint_G \left( \Re \frac{\partial k}{\partial z} \right)^2 dx dy + \iint_G \left| \frac{\partial k}{\partial z} \right|^2 dx dy,$$

gültig mit geeigneter positiver Konstante  $\sigma = \sigma_G$  und allen  $k(x, y)$  aus  $\mathfrak{R}$ , für welche  $\iint_G \frac{\partial k}{\partial z} dx dy = 0$  gilt; dabei bedeutet  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ . Mit Hilfe von Projektions-

operatoren wird zu der im ersten Teil untersuchten Form der zugehörige Operator angegeben. — Ein Hilfsmittel ist der neu eingeführte Begriff des kleinsten Winkels zwischen zwei Teilräumen eines Hilbertschen Raumes. — Anwendungen auf ebene Probleme der Elastizitätstheorie.

*Rellich* (Marburg, Lahn).

**Michal, A. D.:** Abstract covariant vector fields in a general absolute calculus. *Amer. J. Math.* 59, 306—314 (1937).

Continuing his recent investigations in general tensor analysis [*Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 394—401 (1937); see the following rev.] the author keeps the basic notions of coordinate systems  $x(P)$  (homeomorphic mappings of Hausdorff neighborhoods onto an open set of a Banach space) and of coordinate transformations  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  induced by intersecting Hausdorff neighborhoods, and in order to introduce the notion of a covariant vector field assumes that the Fréchet differential  $\bar{x}(x; \delta x)$  of the coordinate transformation  $\bar{x}(x)$  has an adjoint  $\bar{x}^*(x; \delta x)$ . This adjoint however is to exist in the sense that it is a linear function satisfying the identity  $[\bar{x}(x; y), z] = [y, \bar{x}^*(x; z)]$  where  $[x, y]$  is a real, positive definite bilinear form postulated independently of the norm in the Banach space. A similar assumption is made for the inverse transformation  $x(\bar{x})$ . The law of transformation defining a covariant vector field is then  $\bar{\eta}(\bar{x}) = x^*(x; \eta(x))$ . The notions of covariant linear connections and of the covariant differential of a covariant vector valued multilinear form in a finite number of contravariant and covariant vectors are introduced. These notions are related by a brief treatment of a general absolute calculus based upon them and paralleling the discussion of contravariant vector fields given in the above reference. *N. Dunford.*

**Michal, A. D.:** General tensor analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43, 394—401 (1937).

A contravariant vector field (c. v. f.) is a geometric object with a component  $\xi(x)$  (i.e., a function on an open set of a Banach space to the Banach space) for each coordinate system  $x(P)$  (for terminology see the prec. rev.). The component must transform according to the law  $\bar{\xi}(\bar{x}) = \bar{x}(x; \xi(x))$  under a transformation of coordinates  $\bar{x} = \bar{x}(x)$ . The transformation law on a bilinear form which defines a linear connection is given. This is related to the notion of c. v. f. by a theorem which gives necessary and sufficient conditions that a bilinear form be the component of a linear connection and which furnishes a definition for the covariant differential of a c. v. f. The covariant differential of a c. v. f. valued multilinear form in a finite number of contravariant vectors is also defined in terms of a linear connection. Without a linear connection however, the Stokean covariant differential of a completely skew-symmetric absolute scalar multilinear form in a finite number of contravariant vectors is defined.

*N. Dunford* (New Haven).

**Kerner, Michael:** Abstract differential geometry. *Compositio Math.* 4, 308—341 (1937).

This paper is an introductory development of a foundation for an abstract geometry based upon notions centering around a complete linear vector space and the linear operators on such a space, and concerns itself chiefly with an abstract formulation (without mention of dimension) of the concepts which are fundamental to modern metric differential geometry of  $n$  dimensions. A similar but not equivalent formulation has recently been given by A. D. Michal (see the prec. reviews). The family of Banach spaces formed from one Banach space  $E$  by replacing the norm by an equivalent one is called an affine linear space. The vectors in  $E$  are called contravariant vectors of the affine space (there are no contravariant tensors of order greater than one), while the functionals in  $\bar{E}$  (the conjugate space) are the covariant vectors. The  $n$ -linear functionals on  $E \times E \times \cdots \times E$  ( $n$  factors) are the covariant tensors and the  $n$ -linear operations (i.e., functions having values in  $E$ ) are the mixed tensors (of total order  $n + 1$ ). The principal object of the paper is a discussion of covariant differentials and the affine connections determined by them. The forms of the covariant differentials of scalars, contravariant and covariant vectors, mixed and purely covariant tensors are determined by and derived from a set of five postulates. Among the numerous concepts and results based upon the covariant differential might be mentioned the following two theorems. The vanishing of the curvature tensor is a



necessary and sufficient condition for teleparallelism. The simultaneous vanishing of the torsion and curvature tensors is a necessary and sufficient condition for an affine manifold to be Euclidean.

*N. Dunford* (New Haven).

**Kakutani, Shizuo:** Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen. Proc. Imp. Acad. Jap. 13, 93—94 (1937).

Für den Satz von Eidelheit (dies. Zbl. 15, 356), laut welchem es immer für zwei in einem linearen und normierten Raume gelegene konvexe Körper ohne gemeinsame innere Punkte eine sie trennende Ebene gibt, wird ein kürzerer Beweis geliefert.

*Schauder* (Lwów).

## **Funktionentheorie:**

**Milloux, Henri:** Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-H. Cartan. Bull. Soc. Math. France 65, 65—75 (1937).

Die Menge aller Punkte  $z$ , für welche das geometrische Mittel der Abstände von  $n$  festen Punkten  $\leq h$  ist, kann in Kreise eingeschlossen werden, deren Radiensumme  $< 2eh$  bleibt. Diesen vielbenutzten Hilfssatz von Boutroux-Cartan verallgemeinert der Verf. hier, indem er an Stelle von euklidischer Ebene und Abstand in der nicht-euklidischen Ebene  $|z| < 1$  die Pseudodistanz  $|(z - z')/(1 - \bar{z}z')|$  der Punkte  $z, z'$  benutzt; der obige Satz gilt dann entsprechend. Einleitend stellt Verf. die Eigenschaften dieser Pseudodistanz zusammen, gibt dann den Beweis des Satzes und schließt mit der Einführung eines nichteuklidischen Pseudomaßes  $\mu$  einer Punktmenge  $Q$ : Kann man  $Q$  in Kreise der Radiensumme  $\mu + \varepsilon$  einschließen für jedes  $\varepsilon \geq 0$ , aber kein  $\varepsilon < 0$ , so ist  $\mu$  das Pseudomaß von  $Q$ . Es folgen noch einige einfache Anwendungen, insbesondere auf die Frage, wann eine Punktmenge  $m$   $\mu = 2eh$  einen Kreisring  $r' \leq |z| \leq r''$  so erfüllen kann, daß kein von ihr freier Kreis  $|z| = r$  übrigbleibt. — Die Arbeit stellt die Hilfsmittel zusammen, die für eine angekündigte Untersuchung bruchartiger Funktionen (= meromorph in  $|z| < 1$ ) vorbereitet sind. *Ullrich*.

**Grünwald, G., und P. Turán:** Über den Blochschen Satz. Acta Litt. Sci. Szeged 8, 236—240 (1937).

Les Aut. donnent une intéressante démonstration de cette partie du théorème de Bloch: Si  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  est holomorphe pour  $|z| < 1$ , le domaine couvert par les valeurs  $f(z)$  comprend un cercle de rayon au moins égal à une constante  $L$ . Ils montrent d'abord que,  $t(r)$  étant l'aire et  $k(r)$  la longueur du contour (riemanniens) correspondant à  $|z| \leq r$ , il existe un  $r$  ( $0 < r < 1$ ) pour lequel  $2\sqrt{e}t(r) \geq k(r)$  (démonstration basée sur l'inégalité de Schwarz). Ils s'appuient ensuite sur ce lemme: Si  $D$  est un domaine d'aire  $t$  dont la frontière est une courbe de Jordan rectifiable de longueur  $k$ , il existe dans  $D$  un cercle de rayon au moins égal à  $ct/k$ ,  $c$  étant une constante absolue.

*G. Valiron* (Paris).

**Chuang, Chi-Tai:** Sur le comportement d'une fonction holomorphe et de ses dérivées dans un cercle. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 105—106 (1937).

$f(z) = \sum a_n z^n$  étant holomorphe pour  $|z| < 1$ ,  $M(r, f) = \max |f(z)|$  pour  $|z| = r < 1$ , l'Aut. étudie le comportement de  $f(z)$  et de ses dérivées dans certains domaines d'univalence où  $|f(z)|$  est voisin de  $M(r, f)$ ,  $|z| = r$ . L'Aut. suppose seulement  $|a_n| < \lambda |a_{k+l}|$ ,  $|a_{k+l}| \geq 1$  ( $n = 0, 1, \dots, k-1$ ) avec  $l \geq 0$ ,  $k \geq 1$ ,  $\lambda$  étant une constante dépendant de  $k$  et  $l$ . Il montre notamment qu'il existe dans un  $|z| < r$ ,  $k$  domaines d'univalence de  $f(z)$  dans lesquels les valeurs  $Z$  de  $f(z)$  couvrent une couronne  $\frac{1}{2} M(r, f) < |Z| < \frac{1}{2} M(r, f)$ ,  $M(r, f) > \alpha(k, l)$ , fendue arbitrairement suivant un rayon, et dans lesquels  $|f^{(n)}(z)|/|f(z)|$ ,  $1 \leq n \leq k$ , reste compris entre certaines bornes. Ces résultats contiennent le théorème de Bloch et les compléments apportés à ce théorème par le référent (voir ce Zbl. 11, 311).

*G. Valiron* (Paris).

**Ganapathy Iyer, V.:** Some properties of integral functions of finite order. Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 131—141 (1937).

Utilisant la formule d'interpolation de Lagrange comme dans des mémoires précédents (voir ce Zbl. 14, 25), l'Aut. démontre cette proposition qui contient un

théorème de Vl. Bernstein (ce Zbl. 8, 115): Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe de  $z = r e^{i\theta}$  dans l'angle  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2\varrho}$ , d'ordre fini  $\varrho$ ,  $\varrho \geq \frac{1}{2}$ , et du type moyen dans cet angle, soit  $h(\theta)$  son indicatrice de croissance de Lindelöf; on suppose  $h\left(\frac{\pi}{2\varrho}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2\varrho}\right) < 2\pi D$ ,  $D > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-\varrho} \log |f(\lambda_n)| = d$ , les  $\lambda_n$  étant des nombres positifs, avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \lambda_n^{-\varrho}) = D$ . Dans ces conditions, on a

$$d \leq h(0) \leq d + \lim_{n \rightarrow \infty} (-\lambda_n^{-\varrho} \log |\sigma'(\lambda_n^{\varrho})|), \quad \sigma(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2 \varrho}\right).$$

— L'Aut. donne divers corollaires permettant d'affirmer que  $f(z) \equiv 0$  moyennant certaines conditions; il démontre des résultats analogues lorsque  $\varrho < \frac{1}{2}$  en suivant la méthode de mémoires précédents (voir ce Zbl. 15, 164 et 308). *G. Valiron* (Paris).

**Ganapathy Iyer, V.:** On the class of integral functions of finite order having the same zeroes as a given function and whose derivatives have the same zeroes as the derivative of the given function. *Math. Z.* 43, 32—37 (1937).

Soit  $g(z)$  une fonction entière d'ordre fini,  $C(g)$  l'ensemble des fonctions entières  $f(z)$  d'ordre fini telles que  $f(z)$  et  $f'(z)$  aient respectivement les mêmes zéros, avec les mêmes ordres de multiplicité, que  $g(z)$  et  $g'(z)$ . L'Aut. montre que, si  $f$  est une fonction de  $C(g)$  qui n'est pas de la forme  $A g$ ,  $A = \text{const}$ , toute autre fonction de  $C(g)$  est de la forme  $A f$  ou  $A g$ ,  $A = \text{const}$ . Il montre en outre que, moyennant une condition très large sur les ordres de multiplicité de  $g(z) = 0$ , on a entre  $f$  et  $g$  l'une des trois relations suivantes:  $f = A g$ ;  $f = B e^u + D$ ,  $g = E(B + D e^{-u})$ ;  $f = F e^{q u}$ ,  $g = H e^{K u}$ ; où  $u$  est un polynôme,  $A, \dots, K$ , des constantes. En particulier, si  $g(z)$  n'est pas d'ordre entier, on a  $f = A g$ . *G. Valiron* (Paris).

**Dubois, J.:** Extension, aux fonctions quasi méromorphes, d'une méthode de Cauchy relative au développement d'une fonction méromorphe en série uniformément convergente de fonctions rationnelles. I. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 6, 49—54 u. 101—104 (1937).

L'Aut. étend la méthode classique de Cauchy fournissant un développement de Mittag-Leffler d'une fonction méromorphe  $F(z)$  lorsqu'on suppose  $|F(z) z^{-p}|$ ,  $p$  donné, borné sur une suite de contours convenables  $\Gamma_n$  qui s'éloignent indéfiniment. L'Aut. suppose que  $F(z)$  admet, en outre des pôles, un nombre fini de points singuliers essentiels isolés à distance finie. Il passe ensuite, par le procédé classique, au cas d'un développement en facteurs d'une fonction  $f(z)$ , holomorphe à distance finie, sauf en un nombre fini de points essentiels, qui ne sont pas points limites de zéros en supposant alors  $\left| \frac{f'(z)}{f(z) z^p} \right|$ ,  $p$  fini, borné sur les  $\Gamma_n$ . L'auteur ne semble pas se préoccuper de l'ordre des termes dans les séries et produits infinis mis en évidence. *G. Valiron*.

**Montel, Paul:** Sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes. *Ann. École norm.*, III. s. 54, 39—54 (1937).

Ce Mémoire contient les démonstrations des théorèmes que l'A. a énoncés récemment (*C. R. Acad. Sci.* 203, 579; ce Zbl. 15, 70). L'importance de la notion des fonctions localement univalentes tient au fait suivant: Le théorème de contraction (théorème de M. Koebe) ainsi que le théorème de rotation (th. de M. Bieberbach) caractérisent, chacun, les familles de fonctions également localement univalentes; autrement dit pour qu'une famille de fonctions soit composée de fonctions également localement univalentes, il faut et il suffit que les fonctions de cette famille admettent un théorème de contraction ou un théorème de rotation. Outre les définitions mentionnées dans l'analyse de la note citée signalons celle-ci: une fonction est dite localement multivalente d'ordre  $p$  d'une manière complète si sa propriété de multivalence locale n'est pas altérée lorsqu'on ajoute à la fonction un polynôme arbitraire de degré  $(p-1)$ . Pour qu'une fonction  $f(z)$  soit multivalente d'ordre  $p$  d'une manière complète, il faut et il suffit que  $f^{(p)}(z)$  ne s'annule pas. Les fonctions également localement multivalentes d'ordre  $p$  d'une manière complète dans l'intérieur d'un domaine sont caractérisées,



à un polynome additif près de degré inférieur à  $p$ , par un théorème de contraction ou par un théorème de rotation portant sur la dérivée d'ordre  $p - 1$ . *Mandelbrojt.*

**Cotton, Émile:** Sus les intégrales abéliennes dépendant d'un paramètre. *Ann. École norm.*, III. s. 54, 81—100 (1937).

Es handelt sich um das Verhalten von Integralfunktionen in der Umgebung des Nullpunktes  $x = y = z = 0$ .  $y$  sei eine algebraische Funktion von  $x$  und  $z$ , d. h.  $y$  verhalte sich für  $x = z = 0$  wie eine algebraische Funktion. Verf. betrachtet Integrale von rationalen Funktionen von  $x, y, z$ , wobei nach  $x$  integriert wird und  $z$  als Parameter auftritt. Die obere Grenze sei u. U. von  $z$  abhängig. Diese Integrale sind Funktionen von  $z$ , und Verf. untersucht deren Verhalten für  $z = 0$ . Er konstruiert dazu das Newtonsche Polyeder der Singularität. Auf seinen Kanten kann man setzen:  $x = \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}$ ;  $y = \eta(1 + \psi) \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}$ ;  $z = \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2}$  [ $\eta = \text{konst.}$ ;  $\psi = \text{reguläre Funktion von } \lambda, \mu$ ;  $\psi(0, 0) = 0$ ; die Exponenten seien ganz, der g. g. T. von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sei  $D$ ]. Auf seinen Flächen kann man setzen:  $x = \xi \lambda^{\alpha}$ ;  $y = (\eta + \psi) \lambda^{\beta}$ ;  $z = \lambda^{\gamma}$ . Den Integrationsweg in der  $x$ -Ebene zerlegt man in Teile, deren jeder einer solchen Fläche oder Kante entspricht. Die Integrale lassen sich dann in Reihen entwickeln, die nach Potenzen von  $\frac{1}{z^{\gamma_1}}$  und  $\frac{1}{z^{\gamma_2}}$  bzw.  $\frac{1}{z^{\gamma}}$  fortschreiten, zuzüglich einer Reihe, die nach Potenzen von  $\frac{1}{z^D}$  bzw.  $\frac{1}{z^{\gamma}}$  fortschreitet und mit  $\log z$  multipliziert ist. Verf. verdeutlicht seine Methode an drei lehrreichen Beispielen. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Petersson, Hans:** Neuere Untersuchungen über automorphe Formen komplexer Dimension. Bericht. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 47, Abt. 1, 161—176 (1937).

Verf. gibt einen Bericht über die Ergebnisse seiner Untersuchungen über die automorphen Formen (a. F.) zu Grenzkreisgruppen  $\Gamma$ . Eine a. F. ist dabei durch  $f(L\tau) = v(L)(\gamma\tau + \delta)^r f(\tau)$  und gewisse Regularitätsforderungen definiert. Die Dimension  $r$  darf dabei eine beliebige komplexe Zahl sein,  $v(L)$  ist ein von der Substitution  $L \subset \Gamma$  abhängiger Zahlfaktor. Die Gesamtheit aller  $v(L)$  heißt Multiplikatorensystem (M.S.). Für irgend zwei Substitutionen  $L_1$  und  $L_2$  besteht dabei immer eine Beziehung  $(\alpha) v(L_1 L_2) = v(L_1) v(L_2) \sigma(L_1, L_2)$ , wobei  $\sigma(L_1, L_2)$  nur von den beiden Argumenten, aber nicht von  $\Gamma$  abhängt. Zu gegebenem  $\Gamma, r$  und M.S. gibt es immer a. Formen. Verf. hat nun die ganze Theorie von Anfang an neu aufgebaut und dabei wesentliche Vereinfachungen gegen die ältere Theorie erzielt. Überdies gelang es ihm dabei, eine Reihe unerledigter Fragen zu beantworten. Als Grundlage braucht Verf. nur Weyls „Idee der Riemannschen Fläche“. Ausführliche Darstellungen sollen in den *Math. Ann.* erscheinen. — Die wichtigsten Resultate seien angegeben. Der zu  $\Gamma$  gehörige Fundamentalbereich wird als abstrakte Riemannsche Fläche erklärt, topologisch untersucht und so Erzeugende und definierende Relationen für  $\Gamma$  gefunden. Sind die Werte von  $v(L)$  für die Erzeugenden gegeben und genügen den sich aus den def. Rel. mittels  $(\alpha)$  ergebenden Bedingungen, so läßt sich das ganze M.S. bestimmen. Daraus ergibt sich eine explizite notw. und hinr. Bedingung für ein zu  $\Gamma$  und  $r$  gehöriges M.S., wenn  $\Gamma$  von zweiter Art ist. Für Grenzkreisgruppen  $\Gamma$  von erster Art braucht Verf. die Divisorentheorie und zeigt damit, daß es zu jedem  $r$  stets a. Formen und M.S. gibt, wenn  $\Gamma$  eine parabolische Matrix enthält. Auch hier ergibt sich eine explizite notw. und hinr. Existenzbed. für die M.S. Der Riemann-Rochsche Satz, der Brill-Noethersche Reziprozitätssatz und ein Satz von Ritter über multiplikative Formen wird auf beliebiges  $r$  ausgedehnt. Enthält  $\Gamma$  überhaupt keine parabolische Matrix, so muß  $r$  ein Vielfaches einer gewissen, von  $\Gamma$  abhängigen rationalen Zahl sein, damit es ein M.S. und eine a. F. gibt. Die Existenz eines vollständigen Systems a. Primformen kann leicht bewiesen werden. Für die Formel für die Ordnung des Divisors eines Abelschen Differentials auf einer Riemannschen Fl. werden zwei neue, im Rahmen der Theorie liegende Beweise gegeben. — Anschließend wird noch über eine Reihe speziellerer Fragen referiert. *Lochs* (Kennelbach).

**Manià, Basilio:** Un'applicazione della trasformazione di Fourier alle funzioni quasi analitiche. Boll. Un. Mat. Ital. 16, 136—144 (1937).

L'A. établit, en se servant de la transformation de Fourier, des conditions nécessaires et suffisantes pour la quasi-analyticité dans l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ .

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Sommer, Fritz:** Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Bereiche ohne geschlossene innere Singularitätenmannigfaltigkeiten. Math. Ann. 114, 441—464 (1937).

Es wird der folgende Satz bewiesen:  $\mathfrak{B}$  sei ein Teilbereich eines (schlichten oder nichtschlichten) Regularitätsbereiches, der im projektiv abgeschlossenen Raum liegt. [Als einen Regularitätsbereich bezeichnet man üblicherweise den Existenzbereich einer nichtkonstanten analytischen Funktion der  $n$  komplexen Veränderlichen  $\{z\} (=z_1, \dots, z_n)$ .]  $\mathfrak{B}$  habe einen zusammenhängenden Rand. Ist dann  $f(z)$  in allen Randpunkten von  $\mathfrak{B}$  regulär und eindeutig, so läßt sich  $f(z)$  ins ganze Innere von  $\mathfrak{B}$  hinein regulär und eindeutig fortsetzen. Der bewiesene Satz stellt eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Osgood und Hartogs dar (dessen lückenloser Beweis erst von A. B. Brown, vgl. dies. Zbl. 13, 407, gegeben wurde). — Der Beweis des Satzes stützt sich auf die von H. Behnke gegebene Verallgemeinerung des Kontinuitätssatzes und auf folgenden Hilfssatz: Nimmt  $f(z)$  in ihrem Regularitätsbereich  $\mathfrak{R}$  in  $P$  den Wert  $u$  an, so gibt es stets eine zusammenhängende  $\alpha$ -Stellen-Mannigfaltigkeit in  $\mathfrak{R}$ , auf der  $P$  liegt, und die dem Rand von  $\mathfrak{R}$  beliebig nahe kommt. Im Falle eines schlichten Bereiches  $\mathfrak{B}$  mit zusammenhängendem Rand genügt es, wie der Verf. zeigt, an Stelle der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{B}$  ein Regularitätsbereich ist, anzunehmen, daß ein zweidimensionales algebraisches Gebilde existiert, auf dem keine inneren Punkte von  $\mathfrak{B}$  liegen. — Weiter gibt der Verf. andere Kriterien, wann  $f(z)$  sich in jeden inneren Punkt des Bereiches, auf dessen Rand  $f$  regulär ist, analytisch fortsetzen läßt, und den folgenden Satz über meromorphe Fortsetzung: Existiert zu einem schlichten Bereich  $\mathfrak{B}$  mit zusammenhängendem Rand ein spezielles (in der Arbeit näher beschriebenes) zweidimensionales algebraisches Gebilde, auf dem keine inneren Punkte von  $\mathfrak{B}$  liegen, so läßt sich jede am Rande von  $\mathfrak{B}$  eindeutige und meromorphe Funktion ins Innere von  $\mathfrak{B}$  eindeutig und meromorph fortsetzen.

*Stefan Bergmann* (Tiflis).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

**Slutsky, E.:** Qualeche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aleatorie. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 183—199 (1937).

Es sei  $x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , eine stochastische Veränderliche derart, daß bei jeder Wahl der  $t$ , die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $(x(t_1), \dots, x(t_n))$  bekannt ist.  $x(t)$  heißt stochastisch stetig, wenn stets  $P(|x(t) - x(t')| < \varepsilon) > 1 - \varepsilon$  ist, sobald  $|t - t'| < T(\varepsilon)$ . Es werden einige Stetigkeitskriterien bewiesen, insbesondere daß jede stochastisch stetige Veränderliche äquivalent ist mit einer Funktion höchstens zweiter Bairescher Kategorie. Ferner ein von Kolmogoroff ausgesprochenen (bisher nicht publizierter) Satz: Wenn das Absolutmoment von  $|x(t) - x(t')|^m < C|t - t'|^\alpha$  ist,  $m > 0$ ,  $\alpha > 1$ , so ist  $x(t)$  mit einer stetigen Funktion äquivalent.

*W. Feller* (Stockholm).

**Feldheim, E.:** Sulle leggi di probabilità stabili a due variabili. Giorn. Ist. Ital. Attuari 8, 146—158 (1937).

Zur Bestimmung der charakteristischen Funktionen der im Titel genannten Funktionen geht man von der Gleichung für ihren Logarithmus aus:  $\psi(au, av) + \psi(bu, bv) = \psi(cu, cv)$ , und setzt voraus, daß  $\psi$  zweimal nach den Parametern differenzierbar ist.  $\partial^2 \psi(cu, cv) / \partial a \partial b = 0$  ergibt dann sofort eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\chi(\varrho, \vartheta) \equiv \psi(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta)$ .

*W. Feller* (Stockholm).



Doob, J. L.: Stochastic processes depending on a continuous parameter. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 107—140 (1937).

Die allgemeinste bisher vorgeschlagene Definition eines stochastischen Prozesses mit einem Freiheitsgrad war die von Khintchine mit Hilfe einer einparametrischen Schar von stochastischen Veränderlichen  $x(t)$ , bei welcher die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens von endlich vielen Ungleichungen  $x(t_i) < a_i$  definiert ist für jede Wahl von  $t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n$ . Diese Definition ist jedoch unzureichend z. B. für Fragen, die mit sogenannten Ruinwahrscheinlichkeiten zusammenhängen, weil man etwa die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $x(t)$  stetig verläuft, nicht definieren kann (vgl. Khintchine, *Ergebn. Math.* 2, 4, S. 68f., Berlin 1933, und Kolmogoroff, *ibid.* 2, 3, S. 26). Verf. schlägt nun eine beachtenswerte allgemeinere Definition vor, die solche Schwierigkeiten umgeht und auch sonst Interessantes bietet. — Analytisch handelt es sich um eine Maßtheorie im Raume  $\Omega^*$  der reellen Funktionen  $x(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Die „Umgebungen“ werden durch endlich viele Ungleichungen  $a_i < x(t_i) < b_i$  definiert; nach Kolmogoroff (a. a. O. Kap. III, § 4) kann dann für alle Mengen eines diese Umgebungen enthaltenden Borelschen Systems eine nicht-negative absolut additive Mengenfunktion  $P^*(A)$  definiert werden mit  $P^*(\Omega^*) = 1$ . Die wesentliche Idee der Arbeit besteht nun in der Ausschaltung aller unliebsamen Elemente von  $\Omega^*$  (z. B. der nichtmeßbaren Funktionen, die stets das äußere  $P^*$ -Maß 1 haben). Es sei  $\Omega$  eine beliebige Untermenge von  $\Omega^*$  mit dem äußeren  $P^*$ -Maß 1. Ist dann  $A$   $P^*$ -meßbar, so werde  $P(A\Omega) = P^*(A)$  gesetzt: dadurch wird in  $\Omega$  eine absolut additive Mengenfunktion  $P(A\Omega)$  definiert mit  $P(\Omega) = 1$ . Unter einem stochastischen Prozeß versteht Verf. allgemein ein solches  $\Omega$  zusammen mit  $P(A)$ . Es handelt sich dann um die Aufgabe, bei gegebener  $P^*$ -Funktion ein  $\Omega$  auszuwählen mit möglichst regulären Elementen. — Zugänglicher sind zunächst die quasiseparablen Prozesse, bei denen es eine abzählbare, auf der  $t$ -Achse überall dichte Menge  $\{r_n\}$  gibt derart, daß stets der Grenzwert der kleinsten oberen (größten unteren) Grenze von  $x(\tau)$  für  $|t - \tau| < \varepsilon$  derselbe ist wie derjenige für  $x(r_n)$  für  $|t - r_n| < \varepsilon$ . Ferner heißt  $\Omega$  meßbar, wenn  $x(\tau)$  für jedes  $\tau$  eine meßbare Funktion im Produktraum von  $\Omega$  mit der  $t$ -Achse ist, wobei die Masse in diesem durch das Produkt der  $P$ -Masse und der Lebesgueschen Masse definiert werden. Bei meßbaren  $\Omega$  sind fast alle  $x(t)$  Lebesguesch meßbar. Es werden nun verschiedene Kriterien für solche  $\Omega$  angegeben, insbesondere: Es gibt sicher ein meßbares  $\Omega \subset \Omega^*$ , wenn für fast alle  $t$  und alle  $x(t)$  entweder  $P^*\{|x(t+h) - x(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  strebt für  $h \rightarrow 0$  und jedes  $\varepsilon > 0$  oder  $P^*\{\lim_{\tau \rightarrow t} x(\tau) = x(t)\} = 1$  ist; im letzteren Falle ist sogar jedes quasiseparable  $\Omega \subset \Omega^*$  meßbar und dessen Elemente sind mit der Wahrscheinlichkeit 1 fast überall stetig und ebenso fast sicher stetig in jedem festen Punkt  $t_0$ . — Weiter werden ausführlich „Differentialprozesse“ behandelt, bei denen die Zuwächse der stochastischen Veränderlichen in fremden Zeitintervallen stets unabhängige Veränderliche sind. Es werden hier Analoga zu bekannten Sätzen bewiesen, nach denen gewisse Wahrscheinlichkeiten bei Summen stochastischer Veränderlicher nur 0 oder 1 sein können, ferner Sätze über die Stetigkeit der  $x(t)$ , die sich eng an Sätze von P. Lévy anschließen (vgl. Kap. 7 des in dies. Zbl. 16, 170f. referierten Buches). W. Feller (Stockholm).

Clark, C. E.: Note on the binomial distribution. Ann. math. Statist. 8, 116—117 (1937).

The author notices that for  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  the value of the function

$$f(x) = (-1)^n n! p^x q^{n-x} \frac{\sin \pi x}{\pi x(x-1) \dots (x-n)},$$

where  $n$  is a positive integer and  $0 < p < 1$  while  $q = 1 - p$ , coincide with those of the binomial formula  $n! p^x q^{n-x} / x!(n-x)!$ . This induces him to suggest that  $f(x)$  could be considered as a distribution function also for non-integer values of  $x$ . The

method of fitting  $f(x)$  to the empirical data is suggested but, owing to the shortness of the note, the details are unclear. *J. Neyman* (London).

**Ferber, Martin:** Structure d'ordre des séries statistiques du type exponentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **205**, 381—383 (1937).

Es wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung dafür untersucht, daß unter  $N$  beobachteten Größen, die demselben Verteilungsgesetz  $V(x)$  unterliegen, eine bestimmte zwischen  $x$  und  $x + dx$  liegt und gleichzeitig der Größe nach die  $k$ -te ist. Für diese Verteilung werden Korrelationskoeffizient und Momente berechnet, insbesondere im Fall, daß  $V(x) = 1 - e^{-x}$  für  $x \geq 0$ . *W. Feller* (Stockholm).

**Krishna Iyer, P. V.:** The distribution of the mean of Fisher's  $t^2$  for samples from a normal population. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **5**, 528—531 (1937).

### Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

**Lenzi, E.:** Prestiti con obbligazioni a tasso di rendimento costante. Giorn. Ist. Ital. Attuari **8**, 209—220 (1937).

Bedeutet  $C$  den Nominalwert,  $C_0$  den Begebungswert einer Obligation, ist  $i$  der nominelle und  $j$  der effektive Zinskoeffizient einer  $n$  Jahre laufenden Anleihe, so erhält man für den Rückkaufswert  $C_k$  einer bei der  $k$ -ten Ziehung ausgelosten Obligation bei Voraussetzung eines während der ganzen Laufzeit konstanten  $j$  die Rekursionsformel  $C_{k+1} = C_k(1 + j) - Ci$ . Für den Kaufpreis  $V_k$  einer Obligation zu Beginn des  $(k + 1)$ -ten Jahres folgt  $V_k = C_k$ . Soll die Amortisation durch konstante Raten erfolgen, so wird die Zahl  $N_k$  der bei der  $k$ -ten Ziehung auszuloseenden Obligationen durch  $N_k = \frac{C_0 C_1}{C_{k-1} C_k} (1 + j)^{k-1} N_1$  gegeben. Der Vergleich mit der sonst üblichen Form der Amortisation gibt zu interessanten Bemerkungen Anlaß und wird durch ein Zahlenbeispiel ergänzt. Schließlich werden auch Formeln zur Bestimmung der Restschuld nach jeder Tilgung angegeben. *F. Knoll* (Wien).

**Del Chiaro, A.:** Tassi relativi a leggi di capitalizzazione. Giorn. Ist. Ital. Attuari **8**, 247—258 (1937).

Erklärt man den Begriff „effektiver Verzinsungskoeffizient bezüglich des Intervalles  $(u, v)$  für das Verzinsungsgesetz  $L(\eta, u)$ “ durch  $1 + i_\eta(u, v) = \frac{L(\eta, v)}{L(\eta, u)}$  und führt überdies die leicht zu deutende Größe  $\delta_\eta(u, u + \frac{1}{m}) = m i_\eta(u, u + \frac{1}{m})$  ein, so liegt der Grenzübergang  $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_\eta(u, u + \frac{1}{m}) = \delta_\eta(u)$  nahe; durch diese Größen lassen sich zunächst die üblichen Verzinsungsgesetze kennzeichnen, darüber hinaus kann man auch notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, wann ein Verzinsungsgesetz in einem Zeitabschnitt spaltbar ist; man kann umgekehrt, ausgehend von bestimmten Voraussetzungen über die Funktionen  $i_\eta(z, z + \frac{1}{m})$  bzw.  $\delta_\eta(z, z + \frac{1}{m})$ , durch Auflösung einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung die zugeordneten Verzinsungsgesetze finden. *F. Knoll* (Wien).

**Bresciani-Turroni, C.:** On Pareto's law. J. Roy. Statist. Soc., N. s. **100**, 421—432 (1937).

Auf Grund des Paretoschen Gesetzes über die Einkommenverteilung werden Definitionen von Maßzahlen für die Verschiedenheit von Einkommenverteilungen diskutiert. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

### **Geometrie.**

**Mayer, Anton E.:** Sur des faisceaux de courbes des trois barres. C. R. Acad. Sci., Paris **205**, 98—101 (1937).

Kurzer Auszug einer Arbeit (Math. Z. **43**) über Koppelkurven in engem Zusammenhang mit der Dreiecksgeometrie. Alle Koppelkurven mit denselben Brenn-



punkten  $F_i$  und denselben Doppelpunkten  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bilden ein Büschel  $\mathfrak{F}$ . Die Tangentenpaare in  $D_i$  bilden je eine Involution, die Seiten des Doppelpunktdreiecks werden von den Büschelkurven in den Paaren einer symmetrischen Involution geschnitten. Außerdem schneidet  $\mathfrak{F}$  Involutionen auf den Kreisen aus, die entweder einen Brennpunkt zum Mittelpunkt haben und durch einen Doppelpunkt gehen oder die durch zwei Doppelpunkte gehen. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn sich in  $\mathfrak{F}$  eine Koppelkurve  $\Gamma$  mit Spitzen in allen  $D_i$  befindet. Diese Art wird vom Verf. zum erstenmal untersucht. Zu drei vorgegebenen Punkten  $D_i$  gibt es vier dreispitzige Koppelkurven, von denen je zwei einen gemeinsamen Brennpunkt haben. Die drei Spitzentangenten jeder Kurve  $\Gamma$  gehen durch einen Punkt, und sie berührt jede Seite des Spitzendreiecks einmal.

*Eckhart* (Wien).

**Mihăileanu, N. N.: Über Lemoinsche Punkte.** *Gaz. mat.* **42**, 628—631 (1937) [Rumänisch].

**Voderberg, Heinz: Zur Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche in Form einer Spirale.** *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **47**, Abt. 1, 159—160 (1937).

Bemerkungen zur Arbeit des Verf.: „Zur Zerlegung der Umgebung eines ebenen Bereiches in kongruente“ [*Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **46**, 229—231 (1936)]; dies. *Zbl.* **15**, 315].

*O. Bottema* (Deventer, Holl.).

**Sauer, Robert: Ebene gleicheckige Polygongitter.** *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **47**, Abt. 1, 115—124 (1937).

Die Arbeit ist im Resultat eine Wiederholung der von A. Schubnikow schon im Jahre 1916 [Zum Problem der Kristallstruktur. *Bull. Acad. Imp. Scs. Petrograde* (6) Nr. 9, S. 755] abgeleiteten Ergebnisse (vgl. z. B. W. Nowacki, Homogene Raumteilung und Kristallstruktur. *Diss. Eidg. Techn. Hochschule Zürich* 1935, S. 70—71; dies. *Zbl.* **13**, 91) über die Teilung der euklidischen Ebene in Polygongitter, so daß zu zwei Eckpunkten  $P, Q$  mindestens eine Bewegung in der Ebene des Polygongitters existiert, durch die das Gitter als Ganzes mit sich zur Deckung kommt und der Eckpunkt  $P$  in den Eckpunkt  $Q$  transformiert wird. Verf. beschränkt sich auf die Gruppen erster Art und leitet alle möglichen Fälle ab. Irgendwelche der zahlreichen kristallographischen Arbeiten werden nicht zitiert.

*W. Nowacki* (Bern).

### Analytische und algebraische Geometrie:

**Auluck, Faqir Chand: A generalization of the Simson line.** *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **5**, 517 (1937).

Es wird (analytisch) bewiesen: Der Ort der Punkte aus einer Ebene, die gemeinsam mit ihren senkrechten Projektionen auf 5 Gerade auf einem Kegelschnitt liegen, besteht aus diesen Geraden selbst und dem Miquelschen Kreis des 5-Seites. — Der Satz gilt, wie aus dem angegebenen Verfahren einleuchtet, auch für ein  $2n+1$ -Seit und den zugehörigen Miquelschen Kreis, falls man den Kegelschnitt durch eine Jonquièressche Kurve  $n$ -ter Ordnung mit dem Knoten in dem betreffenden Punkt ersetzt.

*D. Barbilian* (Bukarest).

**Strubecker, Karl: Über zirkulare quadratische Komplexe.** *S.-B. Akad. Wiss. Wien* **1936**, 657—680 (H. 9/10).

Ein quadratischer Strahlkomplex  $\mathfrak{K}$  heißt zirkular, wenn er zwei (nicht vereinigte) Bündel von isotropen Strahlen enthält. Betrachtet man eine die Scheitel dieser Bündel enthaltende Ebene als Bildebene  $\pi$  und ordnet man jedem Raumpunkt  $P$  den (allenfalls orientierten) Spurkreis  $p^2$  des Komplexkegels von  $P$  mit  $\pi$  zu, so ergibt sich eine zirkulare Abbildung. Zu den Abbildungen von dieser Art gehört vor allem die gewöhnliche Zyklographie (s. E. Müller-J. Krames, Vorlesungen über darst. Geom. II. Bd., Leipzig u. Wien 1929), die tatsächlich in gleicher Weise mittels des Unisekantenkomplexes eines Fernkreises erhalten wird. Eine andere derartige zirkulare Abbildung, bei der als zirkularer Komplex  $\mathfrak{K}$  ein metrisch spezieller Hirstscher Komplex verwendet wird, hat W. Schmid eingehender untersucht (s. dies. *Zbl.* **7**, 322). In der

vorliegenden Arbeit werden nun die 8 möglichen allgemeinsten Typen von zirkularen quadratischen Komplexen angegeben und an Hand von Normalformen näher gekennzeichnet. Weiter werden verschiedene Merkmale der auf diese Komplexe gegründeten zirkularen Abbildungen angedeutet.

*J. L. Krames (Graz).*

**Franceschi, Odoardo:** Su di una particolare classe di curve sghembe. Boll. Un. Mat. Ital. 16, 149—154 (1937).

L'A. détermine les courbes  $C$ , de l'espace, subordonnant sur deux droites gauches  $r$ ,  $s$  données deux correspondances projectives assignées, lorsqu'on associe deux points de  $r$  (de  $s$ ) dont l'un soit la projection sur  $r$  (sur  $s$ ) d'un point  $P$  de  $C$  à partir de  $s$  (de  $r$ ), et l'autre soit la trace sur  $r$  (sur  $s$ ) du plan osculateur à  $C$  au point  $P$ ; les courbes en question résultent des courbes  $W$  et des courbes appartenant à un complexe linéaire.

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Babbage, D. W.:** A symmetrical configuration of  $n + 1$  rational normal curves in  $(2n)$ . Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 293—300 (1937).

In einem Raume  $S_4$  sind zwei rationale normale Kurven 4. Ordnung  $C_1 C_2$  gegeben, die 6 Punkte  $A_i$  gemein haben; die Ebenen, die  $C_1$  dreimal und  $C_2$  einmal schneiden, schneiden auch einmal noch eine dritte ähnliche Kurve  $C_3$ , die durch alle  $A_i$  hindurchgeht. Allgemeiner: In einem Raume  $S_{2n}$  sind  $n$  geeignete rationale normale Kurven  $C_1 C_2 \dots C_n$  der Ordnung  $2n$  gegeben, die  $2n + 2$  Punkte  $A_i$  gemein haben; die  $S_{2n-2}$ , die  $C_1$   $(2n - 1)$ -mal und  $C_2 \dots C_n$  je einmal schneiden, schneiden auch einmal noch eine andere ähnliche Kurve  $C_{n+1}$ , die durch alle  $A_i$  hindurchgeht. Diese interessante Konfiguration wird hier noch einmal betrachtet. Es wird bewiesen, daß, im Falle  $n = 3$ , die 8 Punkte  $A_i$  und die Kurven  $C_1 C_2$  ganz beliebig angenommen werden können, während  $C_3$  einem wohlbestimmten  $\infty^1$  elliptischen (und  $C_1 C_2$  enthaltenden) System  $\Sigma$  von ähnlichen Kurven angehören muß und  $C_4$  durch  $C_1 C_2 C_3$  vollständig bestimmt wird. Im Falle  $n > 3$  können die Punkte  $A_i$  und die Kurve  $C_1$  beliebig gewählt werden; es werden dann  $\infty^4$  einfache elliptische Systeme ähnlicher Kurven bestimmt, die  $C_1$  enthalten;  $C_2 \dots C_n$  können beliebig in einem solchen System angenommen werden;  $C_{n+1}$  ist dann eindeutig bestimmt und gehört demselben System an. Der Beweis wird für  $n = 3$  vollständig durchgeführt und für  $n > 3$  nur angedeutet. Grundgedanke des Beweises ist die Projektion der Kurve 6. Ordnung  $C_1$  aus einem ihrer Punkte auf eine Kurve  $\varrho$  5. Ordnung eines Raumes  $S_5$ ; die  $S_4$ , die  $C_1$  fünfmal schneiden, liefern die Hyperebenen im  $S_5$ , und denjenigen von ihnen, die durch einen gegebenen Punkt  $P$  hindurchgehen, entsprechen die Hyperebenen des  $S_5$ , die eine gewisse Gerade  $p$  enthalten; es gibt  $\infty^6$  solche Geraden; man bekommt so eine  $(1, 1)$ -Korrespondenz zwischen  $P$  und  $p$ ; der Kurve  $C_2$  entspricht eine rationale normale Regelfläche 4. Ordnung  $\Gamma_2$ , die  $\varrho$  in den 8 Projektionen  $B_i$  der Punkte  $A_i$  schneidet; auf  $\Gamma_2$  gibt es eine einzige elliptische Kurve  $\vartheta$  6. Ordnung, durch die Punkte  $B_i$ , die die Erzeugenden von  $\Gamma_2$  je zweimal schneidet; die  $\infty^1$  Involutionen  $g'_2$  auf  $\vartheta$  liefern, als Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare,  $\infty^1$  ähnliche Regelflächen, denen eben das gesuchte elliptische  $\infty^1$  System  $\Sigma$  von rationalen normalen  $C^6$  im Raume  $S_6$  entsprechen; der gewünschte Satz folgt dann leicht: Den drei Kurven  $C_2 C_3 C_4$  entsprechen auf  $\vartheta$  drei  $g'_2$ , so daß drei beliebige ihrer Punktepaare in einer Hyperebene liegen. Die Betrachtung der  $V_5^4$  des  $S_6$ , die die Punkte  $A_i$  als dreifache Punkte besitzen, liefert dann eine Darstellung aller  $C^6$  durch  $A_i$  und des Systems  $\Sigma$  auf die Punkte eines  $S_6$ .

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Chanler, Josephine H.:** The involution curve determined from a special pencil of  $n$ -ics. Trans. Amer. Math. Soc. 42, 1—15 (1937).

Auf einer rationalen normalen Kurve  $N^k$  eines Raumes  $S_k$  ist eine Involution  $n$ -ter Ordnung gegeben ( $n \geq k$ ); man betrachtet die Kurve  $V_k$  der Ordnung  $\binom{n-1}{k-1}$ , Ort der Schnittpunkte von  $k$  Hyperebenen, die die gegebene Kurve  $N^k$  in  $k$  Punkten einer und derselben Gruppe der Involution oskulieren; jede Gruppe der Involution



liefert  $\binom{n}{k}$  Punkte von  $V_k$ . Zweck der Abhandlung ist die Bestimmung des Geschlechts  $p_k$  von  $V_k$ . Im allgemeinen Falle, wo die gegebene Involution  $2(n-1)$  Doppelpunkte besitzt, die verschiedenen Gruppen angehören, findet man leicht  $p_k = (n-k) \binom{n-1}{n-1} - \binom{n}{k} + 1$ , indem man die Zeuthensche Formel der Korrespondenz anwendet, die von den oskulierenden Hyperebenen von  $N^k$  auf  $N^k$  und  $V_k$  ausgeschnitten wird. Wenn aber eine Gruppe der Involution eine Anzahl  $j > 1$  von Doppelpunkten enthält, erleidet  $p$  eine Erniedrigung  $\tilde{p}$ , die immer durch Anwendung der Zeuthenschen Formel berechnet wird, und die von der Tatsache abhängt, daß die Kurve  $V_k$  in diesem besonderen Falle eine Anzahl von mehrfachen Punkten besitzt; es bietet sich hier, durch Vergleichung des Wertes von  $\tilde{p}$  mit der den mehrfachen Punkten von  $V_k$  entsprechenden Erniedrigung von  $p$ , eine neue Formel der Kombinatorik, die auch algebraisch bewiesen wird. Die mehrfachen Punkte von  $V_k$  werden dann von einem anderen Standpunkt aus untersucht, indem man  $V_k$  als Teil der Schnittkurve von  $k-1$  Hyperflächen betrachtet, die durch Nullsetzen gewisser Unterdeterminanten einer Matrix erhalten werden. Wenn  $k=2$ , wird auch der Wert von  $\tilde{p}$  bestimmt im Fall, wo eine Gruppe der Involution  $m$  Punkte mit den Multiplizitäten  $2k_1, 2k_2, \dots, 2k_m$  enthält; drei Beispiele ( $n=8, m=1, k_1=4$ ;  $n=10, m=2, k_1=4, k_2=1$ ;  $n=10, m=2, k_1=3, k_2=2$ ) erläutern die erhaltenen Formeln.

E. G. Togliatti (Genova).

**Baker, H. F.:** The envelope of the subspaces of the polyhedra of an involution on a rational curve. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 183—187 (1937).

Let  $C^r$  be a rational curve of order  $r$  in an  $r$ -space  $S_r$  and let  $g_m^k$  be a linear series on  $C^r$ . By W. F. Meyer, if  $k < r \leq m$ , then the  $S_{r-1}$ 's containing  $r$  points belonging to sets of the  $g_m^k$  form an envelope of class  $\binom{m-k}{m-r}$ . It is shown that if  $r \leq k \leq m-1$  and if only selected  $S_{r-1}$ 's are considered, then the envelope is of dimension  $2r-2-k$ , provided  $k \leq 2r-2$ , and is then of class  $\binom{m-r+1}{m-k+1}$ . In both cases the equations of the envelope are obtained by equating to zero the determinants of highest possible order contained in a matrix of  $m-k$  columns and  $m-r+1$  rows, whose elements are linear combinations of hyperplane coordinates in  $S_r$ . A perusal of the proof reveals that by selected spaces are meant those spaces  $S_{r-1}$  which are defined by sets of  $r$  points imposing at most  $r-1$  conditions on the sets of the  $g_m^k$ . If this is correct, we do not understand the statement that if  $k \geq r-1$  and  $2r \leq m$ , then the envelope does not exist unless  $k \leq 2r-2$  (let, for instance,  $r=2$  and let  $g_m^k$  be composed of a  $g_2^1$ ; then the envelope is a pencil of lines).

O. Zariski (Baltimore).

**Roth, L.:** The postulation of a multiple surface. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 301—305 (1937).

Die Anzahl der Bedingungen, welche eine Fläche  $F$  den Hyperflächen  $n$ -ter Ordnung in  $S_4$ , die  $F$  als  $i$ -fache Fläche enthalten sollen, auferlegt, ist für genügend hohe  $n$  gleich  $\frac{i(i+1)}{24} \{ [6n^2 - 2(4i-13)n + 3i^2 - 17i + 26] \mu_0 + [3i^2 - 7i - 4 - 2(2i+1)n] \mu_1 + i(i+1) \mu_2 + \nu_2 \}$ .

Darin sind  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  die Rangzahlen von  $F$  und  $\nu_2$  das ceto. Die Methode ist dieselbe, die Campedelli im Fall einer Kurve in  $S_3$  angewandt hat. Folgender Hilfsatz wird benutzt: Ist  $V^l$  eine feste Hyperfläche durch  $F$ , so schneiden die Hyperflächen  $V^n$  genügend hoher Ordnung, die  $F$  als  $i$ -fache Fläche enthalten, aus  $V^l$  außer  $F$  eine Schar von Flächen aus, welches  $F$  in einer vollständigen regulären Kurvenschar schneidet.

van der Waerden (Leipzig).

**Maxwell, Edwin A.:** Regular canonical surfaces of genus three and four. Proc. Cambridge Philos. Soc. 33, 306—310 (1937).

Es werden reguläre Flächen vom Geschlechte  $p_g = p_a = 4$  im dreidimensionalen

Raum gebildet, deren ebene Schnitte kanonische Kurven sind. Die Flächen sollen eine Doppelkurve haben, deren Grad, Geschlecht und Zahl der Tripelpunkte berechnet werden können, sobald der Grad  $n$  der Fläche bekannt ist. Für  $n = 5, 6, 7, 8$  wird die Existenz irreduzibler Flächen der verlangten Art nachgewiesen. Sodann werden auch mehrfach überdeckte Ebenen betrachtet, welche irreduzible reguläre Flächen vom Geschlechte 3 darstellen, deren kanonische Kurven durch die Geraden der mehrfachen Ebene dargestellt werden.

van der Waerden (Leipzig).

**Archbold, J. W.:** On irregular surfaces associated with Cremona involutions. J. London Math. Soc. 12, 136—139 (1937).

Construction of some examples of irregular algebraic surfaces in  $S_3$  whose canonical surfaces give rise to a space involution and such that the isolated multiple points of the surface form a set of the involution. Examples: (a) a surface of order 7 passing doubly through a space sextic of genus 4 and triply through three collinear points  $O, P, P'$ ; the points  $P, P'$  are so chosen that they belong to the involution defined by the system of cubic surfaces passing through the sextic and through  $O$ ; (b) a surface of order 7 passing doubly through a quintic curve of genus 2 and triply through 4 coplanar points  $O_1, O_2, P, P'$ , the points  $P, P'$  being conjugate in the involution determined by the cubic surfaces through the quintic curve and through  $O_1, O_2$ . O. Zariski.

**Archbold, J. W.:** Note on a sextic surface. J. London Math. Soc. 12, 204—205 (1937).

Es handelt sich um die Fläche  $K^2P + KQ(\lambda z + L) + \mu z^2Q^2 = 0$ , wobei  $P = 0$ ,  $Q = 0$  zwei Quadriken und  $K = 0$ ,  $L = 0$  zwei Kegel sind, die den Koordinatenanfangspunkt  $O$  als gemeinsame Spitze besitzen. Die  $F^6$  besitzt eine Doppelkurve 4. Ordnung 1. Art  $K = Q = 0$ ; der Punkt  $O$  ist für  $F$  ein Selbstberührungspunkt mit  $z = 0$  als einzige Tangentialebene. Der Kegel  $K = 0$ , der die Doppel- $C^4$  von  $O$  aus projiziert, ist die einzige adjungierte Fläche der Ordnung  $2 = 6 - 4$ ; es ist also  $p_g = 1$ . Die virtuelle Multiplizität von  $K$  in  $O$  ist 1 und die reelle ist 2; die unendlich kleine Kurve in der Umgebung von  $O$  gehört also als Teil der einzigen kanonischen Kurve von  $F$  an, ohne ausgezeichnet zu sein; jene kanonische Kurve enthält weiter die zwei Geraden  $K = z = 0$ .

E. G. Togliatti (Genova).

**Bronowski, J.:** On triple planes. I. J. London Math. Soc. 12, 212—216 (1937).

On détermine ici quelques caractères concernant les plans  $m$ -ples dont la courbe  $B$  de diramation n'a que les singularités usuelles. En particulier, pour  $m = 3$  (cas que l'A. se propose d'approfondir ultérieurement), on obtient que — si  $B$  est d'ordre  $2b$  et n'admet comme points singuliers que  $3h$  points de rebroussement — le plan triple correspondant a le genre arithmétique  $p_a = \frac{1}{2}b(b-3) + 2 - h$ , le genre linéaire  $p^{(1)} = 2b(b-6) + 28 - 3h$ , et ses courbes canoniques sont d'ordre  $2b-9$ , possèdent  $h-3b+9$  points triples, enfin rencontrent et touchent  $B$  suivant des groupes de  $6(h-b)$  et de  $2b(b-3)-3h$  points, variables dans des séries linéaires; la courbe  $B$ , et sa conjuguée par rapport à l'involution du 3<sup>ème</sup> ordre ayant pour image le plan triple, ont respectivement les degrés  $2b^2-3h$  et  $4b^2-12h$ . Beniamino Segre.

### Differentialgeometrie:

**Andruetto, Giacinta:** Sulla curvatura dell'evoluta di alcuni sistemi di curve piane. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 101—104 (1936).

Wenn eine ebene Kurve in Parameterdarstellung gegeben ist und  $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$  konstant ist, so wird eine sehr einfache Konstruktion für den Krümmungsradius der Evolute der Kurve gegeben. Verf. übersah aber, daß  $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \text{konst.}$  eine Bedingung für den Parameter (und nicht für die Kurve) ist, die immer erfüllt werden kann. Die bei der Konstruktion verwendete Richtung des Vektors  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  hängt aber auch vom Parameter ab. Für Kegelschnitte ergibt sich tatsächlich eine sehr bequeme Konstruktion.

Lochs (Kennelbach).



**Botto, Costantino:** *Sopra una superficie d'area minima collegata ad un fascio di particolari coniche sferiche.* Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 105—125 (1936).

Als spezieller sphärischer Kegelschnitt  $[AB]$  wird der Ort der Punkte  $C$  auf der Kugel bezeichnet, für die  $\angle ACB = \pi/2$  beträgt. Dann erweist sich die Schar  $[A|B]$  aller  $[AB]$  mit festem  $A$  und mit auf einem (festen) Großkreis durch  $A$  laufenden  $B$  als Teil eines isothermischen Netzes. So wird man auf die Frage nach der Minimalfläche gelenkt, deren eine Schar von Asymptotenlinien die Schar  $[A|B]$  als sphärisches Bild zuläßt. Man findet als erzeugende Weierstraßsche Funktion  $F(\tau) = 8^{-1}(1 + 1/\tau^2)^2$ . — Die Behauptung des Verf., daß die betreffende Minimalfläche einseitig sei, muß abgelehnt werden. Sie stützt sich auf einen Irrtum (S. 119f.). *D. Barbilian* (Bukarest).

**Oraw, Alexis:** *Über dreifache Flächensysteme, deren Schnittkurven dreifach-rhombische geodätische Netze bilden.* Würzburg: Diss. 1937. IV, 61 S.

Die von O. Volk angeregte Arbeit definiert zuerst die grundlegenden Begriffe des dreifach-unendlichen Flächensystems und im Anschluß an eine Arbeit von H. Liebmann (Rhombische Geradenetze im Raum. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1927) die dreifach-rhombische, die rhomboedrische und die halbrhomboedrische Teilung des Raumes. Hierauf werden die allgemeinen Funktionalgleichungen für die Bestimmung des dreifachen Flächensystems, deren Schnittkurven rhomboedrische Netze bilden, hergeleitet. Diese Funktionalgleichungen sind aber in ihrem analytischen Ausdruck derart kompliziert, daß man sich für die genannte Bestimmung auf Sonderfälle beschränken muß, was in folgenden drei Fällen explizit durchgeführt wird: 1. Drei Flächenscharen eines dreifachen Flächensystems, deren Schnittkurven ein geodätisches äquidistantes Netz im Raume bilden; 2. die Schnittkurven eines dreifach-orthogonalen Flächensystems bilden ein geodätisch-rhomboedrisches Netz im Raume; 3. das Quadrat des Bogenelements hat die Form  $ds^2 = E^2(du^2 + dv^2 + dw^2) + 2f_3 du dv + 2f_2 du dw + 2f_1 dv dw$ , wobei  $f_3$  eine Funktion von  $w$  allein ist. Die Schnittkurven sollen dann ein geodätisches Netz im Raume bilden. — Jeder der drei Fälle führt auf Flächenscharen, die je ein dreifaches Ebenensystem (aus parallelen Ebenen) bilden. — Der § 4 der Arbeit bestimmt die allgemeinsten dreifachen Flächensysteme, deren Schnittkurven geodätische Netze bilden, wobei sich ergibt, daß dann die drei Flächenscharen aus geradlinigen Flächen bestehen müssen, deren Erzeugende die geodätischen Linien sind, die sich dreifach-rhombisch anordnen lassen. Zum Schluß werden halbrhomboedrische Geradenetze im Raum betrachtet und dabei die Ergebnisse von P. Katilius (Über Kurvenetze und Zellteilungen. Heidelberger Diss. 1930) erneut hergeleitet. *Steck.*

**Salkowski, E.:** *Die Petersonschen Flächen mit konischen Krümmungslinien.* S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1937, 1—18 (Abb. 2).

Im Anschluß an Mitteilungen von P. Stäckel und auf Grund synthetischer Betrachtungen werden die Flächen ermittelt, auf denen die Berührungsebenen längs jeder Krümmungslinie je einen Kegel umhüllen. Man findet (im Reellen) zwei verschiedene Typen, die — bis auf Inversionen — mit den Drehflächen bzw. den allgemeinen Kegelflächen übereinstimmen. — Dieselbe Frage wird auch analytisch behandelt, um einige Ergänzungen zu gewinnen. — Im Rahmen der speziellen Kugelgeometrie (Gruppe  $G_{15}$ ) sind die obigen Lösungen als Darboux' Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu kennzeichnen, die von  $\infty^2$  Kugeln aus einem  $\infty^3$  linearen System umhüllt werden. *D. Barbilian* (Bukarest).

**Behari, Ram:** *Some remarks on Beltrami's associated ruled surface with parallel generators.* Math. Student 4, 193—197 (1936).

Deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre sont associées de Beltrami si les génératrices homologues en sont parallèles. Un calcul direct montre que les secondes formes quadratiques ne diffèrent que par leur signe, d'où la conclusion d'auteur: deux associées de Beltrami ne s'appliquent pas par une déformation continue.

*Finikoff* (Moscou).

**Godeaux, Lucien:** Remarques sur les quadriques associées aux points d'une surface.

J. Chin. Math. Soc. 2, 1—5 (1937).

M. Buchin Su (ce Zbl. 11, 324) a introduit une quadrique attachée au point  $x$  d'une surface ( $x$ ) qu'on appelle quadrique associée. Par un calcul direct l'auteur montre que cette quadrique coïncide avec la seconde quadrique de la suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie de ( $x$ ) et deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour deux quadriques en question. *S. Finikoff*.

Su, Buchin: On certain twisted cubics projectively connected with a space curve.

J. Chin. Math. Soc. 2, 54—60 (1937).

Soit  $C$  une courbe en espace,  $S$  la surface lieu des tangentes de  $C$ . Un plan tangent  $\pi$  de  $C$  en un point  $O$  intercepte sur  $S$  une courbe plane  $C'$  qui a en  $O$  un point d'inflexion. Le plan  $\pi$  pivotant autour de la tangente de  $C$ , la ligne de Bompiani représentant le voisinage de 5<sup>me</sup> ordre de  $C'$  engendre un cône quadratique  $V$  et le point de Bompiani représentant le voisinage de 6<sup>me</sup> ordre de  $C'$  décrit une cubique gauche  $C_3$ . Or la caractéristique des cônes  $V$  quand  $O$  se déplace le long de  $C$ , est une autre cubique  $C'_3$ . Deux cubiques  $C_3$  et  $C'_3$  coïncident si  $C$  appartient à un complexe linéaire.

*S. Finikoff* (Moscou).

Su, Buchin: On certain configurations ( $T$ ) of Finikoff and the transformations of Calapso. II. J. Chin. Math. Soc. 2, 61—83 (1937).

En poursuivant l'étude des configurations ( $T$ ) ayant  $\infty$  transformées de Calapso (ce Zbl. 15, 230) l'auteur montre que les configurations ( $T$ ) transformées appartiennent à la même classe ( $T^*$ ) c.-à-d. admettent elles mêmes  $\infty$  transformations de Calapso. Il existe parmi ces  $\infty$  configurations transformées deux familles de  $\infty^1$  configurations dégénérées dont les quadriques transformatrices de Calapso sont des quadriques de Lie pour certaines surfaces dégénérées. Les points génériques des surfaces citées sont situés sur deux droites fixes qui coïncident avec les directrices de la congruence linéaire engendrée par l'une ou l'autre diagonale de la configuration primitive. *S. Finikoff*.

Su, Buchin: Note on the projective differential geometry of space curves. J. Chin. Math. Soc. 2, 98—137 (1937).

L'auteur développe la théorie des courbes gauches  $\Gamma$  en partant des points invariants  $O_4$ ,  $O_6$  et de la droite  $l_6$  de Bompiani (ce Zbl. 13, 320) attachés à un point d'inflexion d'une courbe plane et qui en caractérisent le voisinage de 4<sup>me</sup>, 6<sup>me</sup> ou 5<sup>me</sup> ordre. A chaque point  $P$  de  $\Gamma$  il rattache un tétraèdre mobile  $T(P_1) = PP_1P_2P_3$  dont  $P_1$  est un point arbitraire sur la tangente  $t$  de  $\Gamma$ ,  $P_2$  est le point de contact de la conique osculatrice de  $\Gamma$  avec  $P_1P_2$  et  $P_3$  est  $O_6$  de Bompiani par rapport à l'intersection de  $PP_1P_3$  avec la développable — lieu des tangentes de  $\Gamma$ . On a alors  $O_4 \equiv P_1$

et  $l_6 \equiv PP_3$ . Si  $P_1 = \frac{dP}{du}$ , le tétraèdre  $T(P_1)$  est fondamental; il devient normal si, le paramètre  $u$  et la normalisation de  $P$  bien choisis, on a  $P_2 = \frac{dP_1}{du}$ . On détermine

$Q_1$  par le rapport enharmonique  $(Q_1PP_3O_6) = \lambda$  où  $O_6$  se rapporte à la projection de  $\Gamma$  du point  $P_3$  sur  $PP_1P_3$ . Si  $P_1$  se déplace sur  $t$ ,  $Q_1$  ( $\lambda = \text{const}$ ) décrit une cubique gauche,  $Q_{-8}$  — la cubique osculatrice de  $\Gamma$ ;  $Q_{-8}$  est le point de coïncidence de Kani-tani (ce Zbl. 7, 364; 11, 173). Si  $D_1$  est le rapport enharmonique de 4 points d'intersection de la tangente de  $\Gamma$  à un point  $Q$  infiniment voisin de  $P$  avec les plans du tétraèdre  $\{PP_1P_2Q_1\}$ , la partie principale de  $\frac{2}{3}D_1 - 1$  détermine le premier (pour  $\lambda = 0$ ) ou le second ( $\lambda = -2$ ) arc projectif de  $\Gamma$ .

*S. Finikoff* (Moscou).

Lagrange, René: Sur les congruences de cercles qui ont deux diamètres focaux. J. École polytechn., III. s. 143, 9—44, 101—111 et 193—213 (1937).

L'auteur examine les congruences B de cercles  $\Gamma$  dont les quatre foyers de chaque cercle sont situés sur les extrémités de deux diamètres  $d$ . Les diamètres  $d$  et les plans focaux de l'axe  $\Delta$  de  $\Gamma$  ont les mêmes plans bisecteurs, les normales  $n$  aux nappes focales de B aux points situés sur un diamètre  $d$  divisent harmoniquement les foyers de  $\Delta$  et cette propriété caractérise les congruence B. Si les rayons de  $\Gamma$  d'une B sont



constants, les centres de  $V$  sont situés sur une courbe ou bien (congruences de Ribaucour) coïncident avec les points où les plans de  $\Gamma$  touchent leur enveloppe  $S$ ; les diamètres  $d$  sont les directions principales de  $S$ , les normales  $n$  concourent deux à deux aux centres de courbure principaux de  $S$ . Inversement, si deux normales  $n$  concourent au point  $A$ , ou bien  $1^\circ$   $A$  décrit une courbe et  $\infty'$  cercles  $\Gamma$  sont situés sur une sphère  $\Sigma$  au centre  $A$  et dont le cercle caractéristique est coplanaire et cocentrique au cercle de centres de  $\Gamma$  ou  $2^\circ$  ( $A$ ) est une surface et la congruence  $B$  est de Ribaucour dont la surface  $S$  est développante de ( $A$ ) ou  $3^\circ$  ( $A$ ) possède un  $ds^2$  de la forme  $ds^2 = \frac{dy^2}{y-x} + E(x, y) dx^2$  et  $\Delta$  enveloppent sur ( $A$ ) les lignes  $x = \text{const.}$  La congruence ( $\Delta$ ) donnée, l'équation de Laplace détermine le rayon de la sphère  $\Sigma$ , centrée en un foyer de  $\Delta$  et contenant  $\Gamma$  dont le centre est dans le plan caractéristique de  $\Sigma$  correspondant à l'autre foyer. La représentation sphérique de  $B$  est fournie par un réseau dont les tangentes aux lignes issues de l'extrémité du rayon parallèle à  $\Delta$  sont parallèles aux diamètres  $d$ . Deux congruences  $B$  à la même représentation sphérique sont parallèles. Les congruences  $B$  cocentriques et coplanaires sont toutes parallèles entre elles (si la congruence ( $\Delta$ ) ne dégénère pas) si deux congruences le sont. Les congruences  $B$  à réseau sphérique orthogonal cocentriques et parallèles sont  $1^\circ$  les congruences de Ribaucour,  $2^\circ$  les congruences dont deux normales  $n$  ont un sommet commun décrivant une courbe, leur représentation sphérique contient une famille de cercles. Transformation des congruences  $B$  par une variation des rayons de  $\Gamma$  ou par un pivotement de  $\Gamma$  autour de son centre. Examen des cas particuliers remarquables. L'auteur applique la méthode du trièdre mobile et du calcul pfaffien absolu (Mém. Sci. math. 19) qui simplifie beaucoup l'écriture. *S. Finikoff* (Moscou).

**Matsumura, Sôji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. X—XVI. Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. 15, 71—112, 131—150, 221—243, 257—264, 295—306 (1935); 18, 53—74 (1936).

IX. vgl. dies. Zbl. 10, 80.

**Matsumura, Sôji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. XVII. Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. 18, 149—163 (1936).

Dans le § 1 l'auteur examine trois cercles dans  $R_2$ , leur position mutuelle, orthogonalité etc. Dans § 2 il construit les trajectoires isogonales d'une famille de courbes sur une surface de cercles  $S$ . Dans § 3 il examine les lignes minima et la définition des angles sur  $S$ . Les § 4 contient les formules déterminant l'angle de deux courbes sur  $S$ , leur orthogonalité etc. Le § 5 introduit la notion du gradient dans l'espace de sphères  $R_3$ . Le § 6 contient une formule de surface de cercles de Liouville. Dans le § 7 l'auteur donne définition de  $h$ -sphères (sphères bissectrices) et construit la condition qu'une sphère donnée est orthogonale à 6  $h$ -sphère de trois sphères données. Dans § 8 il introduit certains cercles  $\tau$  par rapport à deux cercles donnés dans  $R_2$ .

*S. Finikoff* (Moscou).

**Matsumura, Sôji:** Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. XVIII. Mem. Fac. Sci. a. Agricult. Taihoku Univ. 18, 185—200 (1937).

Dans le § 1 l'auteur donne la formule qui détermine le rapport enharmonique de quatre cercles d'un faisceau d'où suit que deux cercles sont orthogonaux s'ils divisent harmoniquement les cercles-points du faisceau, il examine les points  $z = \zeta \pm i\eta$  où  $\zeta$  et  $\eta$  sont deux cercles dans  $R_2$ , il donne certaines formules pour les faisceau de cercles, il examine une famille de sphères à un paramètre et l'angle de deux sphères voisines, deux cercles dans  $R_2$  et certaines formules qui se rapporte à leur angle, les directions dans le voisinage d'une sphère dans  $R_n$  et la sphère qui passe par l'intersection de trois sphères voisines d'une famille de sphères à un paramètre. Le § 2 et 3 contiennent quelques compléments aux Mémoires antérieures de l'auteur (ce Zbl. 10, 80). Dans § 4 il traite les surfaces de cercles qui portent les réseaux  $D$  de Radon etc.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Takasu, Tsurusaburo: Differentialkugelgeometrie im Lieschen Raume. I. Lie-geometrische Verallgemeinerung der ebenen Kurventheorie.** Sci. Rep. Tôhoku Uni., I. s. 25, 953—1047 (1937).

Nach einem Überblick über die Stellung der verschiedenen vom Verf. mehrfach behandelten Geometrien (vgl. zahlreiche Berichte in den Tôhoku Sci. Rep.) werden in der Lieschen höheren Kreisgeometrie folgende Gegenstände behandelt: Scharen von Kongruenzen orientierter Kreise in der Ebene, allgemeine Scharen orientierter Kreise in der Ebene, eine Übertragung der allgemeinen Kurventheorie in der konformen Ebene und eine Reihe von speziellen Sätzen, die sich durch Konstantsetzen von Invarianten oder durch Übertragung von Sätzen aus der Geometrie in der konformen Ebene ergeben.

Heinrich Schatz (Innsbruck).

**Haimovici, M., e T. Levi-Civita: Sugli spazi metrici a connessione affine.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 25, 315—320 (1937).

Der Tangentialraum  $T$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit im Punkte  $P$  soll eine affine Gruppe  $\Gamma$  zulassen, welche ein uneigentliches  $(n-2)$ -dimensionales Gebilde  $H$  im  $T$  reproduziert;  $G$  sei ihre zentroaffine Untergruppe,  $L=0$  die homogene Gleichung (ersten Grades) des Kegels, der  $H$  vom  $P$  aus projiziert, und zwar in bezug auf ein  $n$ -Bein, welches mit dem Koordinaten- $n$ -Bein nicht identisch zu sein braucht. Der Vergleich der Gleichungen für vektorielle Parallelverschiebung, ausgedrückt einmal in bezug auf  $G$ , das andere Mal in der üblichen tensoriellen Darstellung, liefert ein Gleichungssystem  $S_1$  (für die Konnexionskoeffizienten  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  und für die — in der Zwischenrechnung auftretenden — unbekannten Funktionen), aus welchem  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$  eliminiert werden können, so daß man ein zweites System  $S_2$  (nur für die obenerwähnten unbekannten Funktionen) bekommt. Wird  $S_2$  nach diesen Funktionen gelöst, und werden diese in  $S_1$  eingesetzt, so bekommt man aus  $S_1$  die  $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ . Die dadurch bestimmte Konnexion ist affin und metrisch (mit der metrischen Form  $L$ ), da bei der Parallelverschiebung  $dL = L d\psi$  (wo  $d\psi$  kein exaktes Differential zu sein braucht). Es folgen Beispiele für  $n=3$ .

Hlavatý (Princeton).

**Traber, R. E.: A fundamental lemma on normal coordinates and its applications.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 8, 142—147 (1937).

Zuerst wird folgende Behauptung bewiesen. Zu jedem Punkte  $P$  einer allgemeinen Mannigfaltigkeit (space of paths) läßt sich eine Umgebung angeben, welche mit Normalkoordinaten gleichmäßig (in bezug auf die Punkte der Umgebung) bedeckt werden kann. — Als Anwendung dieses Satzes werden zwei Theoreme bewiesen, von denen mindestens einer (von Whitehead schon früher bewiesene) zitiert werden soll: In jeder allgemeinen Mannigfaltigkeit (space of paths) kann man jedem Punkte  $P$  eine Umgebung  $U(P)$  zuordnen, welche folgende Eigenschaft besitzt: Je zwei Punkte von  $U(P)$  können mit einer und nur einer Autoparallelen (path) verbunden werden, welche ganz in  $U(P)$  liegt.

Hlavatý (Princeton).

**Ahlfors, Lars: Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen.** Acta Soc. Sci. Fennicae 2, Nr 6, 1—17 (1937).

Die bisherige metrisch-topologische Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen stützte sich in ihrem metrischen Teil für Beschreibung und Schlüsse auf Überdeckungs-messungen mit Hilfe von Längen und Flächeninhalten, indem die Metrik der (geschlossenen) Grundfläche  $W_0$  mit der Charakteristik  $\varrho_0$  auf die Überlagerungsfläche  $W$  übertragen wurde [vgl. Acta math. 65, 157—194 (1935); dies. Zbl. 12, 172—173]. In dieser Arbeit nun verankert der Verf. seine Betrachtungen viel tiefer bei den klassischen Begriffsbildungen der Differentialgeometrie, indem er von einer Riemannschen Metrik  $ds^2 = \lambda^2 |dw|^2$  auf der Grundfläche  $W_0$  ausgehend die Gaußsche Krümmung  $K$  und den geodätischen Kontingenzwinkel  $\tau$  heranzieht (für eine feste Kurve sei  $\theta$  der Winkel der Tangente mit einer festen Richtung und  $n$  die Normale nach rechts; dann ist

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad d\tau = d\theta + \frac{\partial}{\partial n} \log \lambda ds).$$



Daneben tritt die auf Massenbelegungen von  $W_0$  als additive Mengenfunktionen gestützte potentialtheoretische Betrachtungsweise, die zuerst von Frostman mit Erfolg in die Wertverteilungslehre hereingenommen (dies. Zbl. 12, 80) und dann von Ahlfors selbst zu einer Neufassung der Methoden der Wertverteilungslehre ausgedehnt wurde [Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. 8, Nr 10 (1935); dies. Zbl. 11, 259]. — In einem ersten Teil werden die potentialtheoretischen Hilfsmittel zusammengestellt. Der Hauptteil (§ 2) betrifft berandete Überlagerungsflächen. Zur Riemannschen Metrik (wie oben) liefert bei einfach zusammenhängenden Gebieten  $\Omega$  mit Rand  $\Gamma$  die Greensche Integraltransformation, angewandt für das Funktionenpaar  $1, \lambda$ , die Gauß-Bonnetsche Integralformel, die dann mittels Triangulation additiv auf allgemeinere Gebiete (berandete Überlagerungsflächen  $W$  von  $W_0$ ) ausgedehnt wird; dabei kommen die mit der Dreiecksteilung stets verwickelten Anzahlen herein (Ecken, Kanten, Dreiecke) und die daraus gewonnene Charakteristik ( $\varrho$  von  $W$ ,  $\varrho_0$  von  $W_0$ ). Nun faßt der Verf. die differentialgeometrischen Formeln vom potentialtheoretischen Gesichtspunkt aus ins Auge und nimmt sie zur Grundlage für eine Massenbelegung  $\kappa(\Omega) - \varrho_0 S_0(\Omega)$  und das zugehörige Potential  $p$ ; dabei ist

$$\kappa(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} K \, d\omega$$

die curvatura integra von  $\Omega$ ,  $\kappa(W_0) = 2$ , und  $S_0$  eine Normalbelegung von  $W_0$  mit stetiger Dichte und der Gesamtmasse 1. Dann gilt als Kernsatz die Gleichung

$$\varrho_0 S_0(W) = \varrho - n_1 + \frac{1}{2\pi} \int_T \left( d\tau + \frac{\partial p}{\partial n} ds \right)$$

( $n_1$  ist die Summe aller Verzweigungsordnungen der Windungspunkte in  $W$ ). Dieser Satz wird zunächst für eine reguläre Metrik bewiesen, dann aber auf eine singularitäten-behaftete Metrik ausgedehnt, wozu  $W_0$  an  $q$  Punkten  $a_1, \dots, a_q$  punktiert wird; dies führt zur Theorie der Ausnahmewerte, sobald später der Übergang zur offenen Überlagerungsflächen vorgenommen wird. Das geschieht in § 3 mit Hilfe einer ausschöpfenden Folge berandeter Teilflächen, wobei in schon länger bekannter Weise die Hilfsgrößen der Wertverteilungslehre (Charakteristik  $T$ , Anzahl- und Schmiegunsfunktionen) durch den Integrationsprozeß  $\int \dots d \log r$  zustande kommen und die obigen differentialgeometrischen Formeln, im wesentlichen also der Gauß-Bonnetsche Satz, den zweiten Hauptsatz der Wertverteilungslehre nach sich ziehen. Zum Schluß gewinnt der Verf. auch noch seine Scheibensätze verallgemeinert auf seinem neubegründeten Wege.

Ulrich (Gießen).

### **Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konkaves und Verwandtes:**

**John, Fritz:** Polar correspondence with respect to a convex region. Duke math. J. 3, 355—369 (1937).

Im  $n$ -dimensionalen projektiven Raum  $\pi_n$  sei ein konvexer Bereich  $R$  gegeben. Unter einer Polarität in bezug auf  $R$  versteht Verf. eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von  $R$  einerseits und den Hyperebenen außerhalb  $R$  andererseits. Es seien  $P_1, P_2$  zwei beliebige Punkte von  $R$  und  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  der Schnittpunkt der Geraden  $P_1 P_2$  mit der  $P_1$  bzw.  $P_2$  entsprechenden Hyperebene. Die Polarität wird positiv genannt, wenn die Punkte  $P_1, Q_1$  niemals von  $P_2, Q_2$  getrennt werden. Das erste Hauptresultat besagt, daß eine positive Polarität stets von selbst stetig ist. Der folgende Teil der Arbeit behandelt eine besondere Klasse von positiven Polaritäten, die symmetrischen, für deren Definition auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich durch die folgende (projektiv erweiterte) Konstruktion gewinnen lassen. Man betrachte einen konvexen Bereich  $R$  im affinen Raum  $A_n$  (Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ ). Der  $A_n$  sei in einen  $A_{n+1}$  (Koordinaten  $x_1, \dots, x_n, y$ ) eingebettet.  $y = f(x_1, \dots, x_n) > 0$  sei in  $R$  definiert und stelle

dort eine nach oben konvexe Fläche  $\Sigma$  dar. Man erhält nun eine symmetrische Polarität des  $A_n$  in bezug auf  $R$ , indem man dem Punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $R$  den Schnitt der Stützhyperebene der Fläche  $\Sigma$  im Punkt  $(x_1, \dots, x_n, y)$  mit dem  $A_n$  zuordnet. Unter geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen sind die positiven symmetrischen Polaritäten auch dadurch charakterisiert, daß sie sich in der Umgebung jedes Punktes durch die Polarität in bezug auf ein Gebilde zweiter Ordnung approximieren lassen. — Eine bemerkenswerte Klasse von symmetrischen Polaritäten erhält man, wenn man von einer positiven stetigen Massenverteilung auf  $R$  ausgeht. Einer Hyperebene außerhalb  $R$  ordne man den Punkt von  $R$  zu, der bei einer derjenigen Kollineationen, die die Hyperebene in die unendlich ferne überführen, in den Schwerpunkt der Massenverteilung übergeht. Bei dieser Kollineation geht zugleich das oben erwähnte „approximierende“ Gebilde zweiter Ordnung in das zum Punkte gehörige Legendresche Trägheitsellipsoid über. Auf Grund dieses Zusammenhanges gewinnt Verf. neue Beweise und Verallgemeinerungen von bekannten Eigenschaften des Legendreschen Trägheitsellipsoids [vgl. Blaschke, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 70, 72—75 (1918)]. *W. Fenchel.*

**Sz. Nagy, Julius v.:** Über die aus Regelflächen zweiter Ordnung bestehenden Flächen vom Maximalindex. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 47, Abt. 1, 145—148 (1937).

Verf. hat früher (unabhängig von Juel) die Existenz von geradlinigen Flächen vierter Ordnung vom Maximalindex nachgewiesen, welche Summen zweier geradliniger Flächen zweiter Ordnung sind. Verf. zeigt jetzt, daß dies auch die einzige Möglichkeit ist, um Flächen vom Maximalindex aus Flächen zweiter Ordnung aufzubauen; m. a. W.: Eine Fläche, welche Summe von mindestens drei geradlinigen Flächen zweiter Ordnung ist, kann nicht vom Maximalindex sein. Beim Beweise werden frühere Ergebnisse [Math. Ann. 98, 657—683 (1928)] herangezogen. *Haupt (Erlangen).*

**Cnow, Shao-Lien:** Le problème intégral de la localisation des ensembles ponctuels plans bornés à paratingent incomplet. Fundam. Math. 29, 12—21 (1937).

Dans une première partie l'auteur revient sur le résultat suivant déjà établi dans sa thèse (Poitiers 1936): Par un ensemble borné, plan, fermé, punctiforme à paratingent toujours incomplet, on peut faire passer un arc simple rectifiable. Dans la seconde partie, il complète ce résultat par le théorème suivant: Un ensemble plan, borné, fermé à paratingent partout incomplet est formé de cycles en nombre fini et d'un ensemble localisable sur un arc à ptg. partout incomplet. *E. Blanc (Paris).*

### Topologie:

**Hopf, Heinz:** Über die Sehnen ebener Kontinuen und die Schleifen geschlossener Wege. Comment. math. helv. 9, 303—319 (1937).

Eine Sehne eines ebenen Kontinuums  $K$  (= beschränkte, abgeschlossene, zusammenhängende Punktmenge) ist eine Strecke, deren Endpunkte auf  $K$  liegen. Eine Gerade  $g$  der Ebene sei ausgezeichnet. Es werden die Sehnen von  $K$  betrachtet, die zu  $g$  parallel sind. Die Menge der Zahlen, die als Längen dieser Sehnen auftreten, sei  $\mathfrak{S}(K)$ . Alle Zahlen von  $\mathfrak{S}(K)$ , bis auf die Null, die mit hinzugerechnet wird, sind positiv. Es wird die Frage beantwortet: Zu welchen Zahlenmengen  $\mathfrak{M}$  gibt es ebene Kontinuen  $K$  mit  $\mathfrak{S}(K) = \mathfrak{M}$ ? Bezeichnet  $\mathfrak{M}^*$  die Komplementärmenge von  $\mathfrak{M}$  in der Menge der positiven Zahlen, so lautet die Antwort: Dann und nur dann gibt es ein ebenes Kontinuum  $K$  mit  $\mathfrak{S}(K) = \mathfrak{M}$ , wenn  $\mathfrak{M}^*$  additiv ist, d. h. wenn aus  $a \in \mathfrak{M}^*$ ,  $b \in \mathfrak{M}^*$  stets folgt  $a + b \in \mathfrak{M}^*$ . Hierin ist ein Satz von P. Lévy [C. R. Acad. Sci., Paris 198, 424—425 (1934); dies. Zbl. 8, 218] enthalten, der eine geometrische Charakterisierung der Zahlen  $\frac{1}{n}$  darstellt: Ist  $K$  irgendein ebenes Kontinuum,  $c$  eine Zahl aus  $\mathfrak{S}(K)$  und  $n$  irgendeine positive ganze Zahl, so gehört auch  $\frac{1}{n}c$  zu  $\mathfrak{S}(K)$ ; ist dagegen  $s$  eine positive Zahl, die nicht von der Form  $s = \frac{1}{n}$  mit ganzem  $n$  ist, so gibt es ein  $K$ , für welches die Menge  $\mathfrak{S}(K)$  zwar die Zahl 1, aber nicht die Zahl  $s$  enthält. Der Satz über die Additivität von  $\mathfrak{S}^*(K)$  folgt auch aus der schärferen Aussage: Be-



sitzt  $K$  eine Sehne  $S$  der Länge  $a + b$ , aber keine zu  $S$  parallele Sehne der Länge  $a$ , so besitzt  $K$  wenigstens zwei zu  $S$  parallele Sehnen der Länge  $b$ . Dieser Satz wird — sogar mit einer weiteren Verschärfung — für den Fall einer Kurve  $K$  bewiesen. Schließlich werden die Sätze angewendet auf die Schleifen geschlossener Wege:  $\mathfrak{B}$  sei ein geschlossener Weg in der Ebene und  $o$  ein nicht auf  $\mathfrak{B}$  gelegener Punkt der Ebene; die Umlaufzahl von  $\mathfrak{B}$  um  $o$  sei  $n \geq 2$ ; dann gibt es zu jeder Zahl  $k$  aus der Reihe  $1, 2, \dots, n-1$  wenigstens zwei Schleifen von  $\mathfrak{B}$ , deren Umlaufzahlen um  $o$  gleich  $k$  sind. Hieraus folgt, daß  $\mathfrak{B}$  wenigstens  $n-1$  Doppelpunkte besitzt. Ein analoger Satz gilt für geschlossene Kurven auf orientierbaren Flächen.

H. Seifert (Heidelberg).

**Neumann, J. v.:** Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Erg. math. Kolloqu. H. 8, 73—83 (1937).

Verf. beweist den folgenden Satz: Es seien  $R_m(x_1, \dots, x_m)$ ,  $R_n(y_1, \dots, y_n)$ ,  $R_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  die euklidischen Räume der betreffenden Dimensionen,  $S$  und  $T$  beschränkte, abgeschlossene und konvexe Mengen in  $R_m$  bzw.  $R_n$  und  $S \times T$  ihr kartesisches Produkt in  $R_{m+n}$ . Ferner seien  $V$  und  $W$  zwei abgeschlossene Teilmengen von  $S \times T$  mit folgenden Eigenschaften: Für jeden festen Punkt  $(x_1, \dots, x_m)$  aus  $S$  ist die Menge der Punkte  $(y_1, \dots, y_n)$ , für welche  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  zu  $V$  gehört, nicht leer und konvex.  $W$  habe die analoge Eigenschaft bez.  $T$ . Dann haben  $V$  und  $W$  wenigstens einen gemeinsamen Punkt. Der Beweis beruht auf einer nicht auf der Hand liegenden Zurückführung auf den Brouwerschen Fixpunktsatz für das Element.

Der Satz wird verwendet, um die Lösbarkeit eines allgemeinen ökonomischen Gleichungssystems (besser Ungleichungssystems) zu beweisen. Es seien  $G_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , die sämtlichen Güter der Wirtschaft,  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , die wirtschaftlichen Prozesse.  $P_i$  erzeuge in der Zeiteinheit aus den Mengen  $a_{ij}$  der Güter  $G_j$  die Mengen  $b_{ij}$ . Der Preis der Einheit von  $G_j$  sei  $y_j$ , die Intensität, mit der der Prozeß  $P_i$  zur Anwendung kommt,  $x_i$ . Es wird angenommen, daß die Verhältnisse der  $x_i$  zeitlich konstant bleiben, die  $x_i$  selbst sich aber in der Zeiteinheit um einen gemeinsamen Faktor  $\alpha$ , den Expansionskoeffizienten der Wirtschaft, ändern können. Schließlich sei  $\beta$  der Zinsfuß. Das fragliche Ungleichungssystem ist nun

$$\alpha \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i, \quad \beta \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j$$

mit dem Zusatz: Für diejenigen  $j$ , für die in der ersten Ungleichung  $<$  steht, ist  $y_j = 0$ , und für diejenigen  $i$ , für die in der zweiten  $>$  steht, ist  $x_i = 0$ . Diese Relationen bringen zum Ausdruck: 1. Von keinem Gut  $G_j$  wird mehr verbraucht als produziert; wird weniger verbraucht, so ist der Preis von  $G_j$  gleich 0. 2. Bei keinem Prozeß  $P_i$  wird ein Gewinn erzielt (da sonst Preise oder Zinsfuß steigen würden); würde ein Verlust entstehen, so kommt der Prozeß nicht zur Anwendung. Die  $a_{ij} \geq 0$  und  $b_{ij} \geq 0$  sind als gegeben anzusehen,  $\alpha, \beta, x_i, y_j$  die Unbekannten. Aus dem obigen Satz folgt die Existenz von wenigstens einer Lösung mit

$$x_i \geq 0, \quad \sum x_i > 0, \quad y_j \geq 0, \quad \sum y_j > 0.$$

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Hirsch, Guy:** Une généralisation d'un théorème de M. Borsuk concernant certaines transformations de l'Analysis Situs. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 219—225 (1937).

Neuer Beweis des Satzes von Borsuk über die Wesentlichkeit der antipodentreuen Abbildungen der  $S^n$  auf sich (solche Abbildungen haben stets einen ungeraden Grad), Verallgemeinerungen dieses Satzes und weitere Sätze aus demselben Ideenkreis.

P. Alexandroff (Moskau).

**Rothe, Erich:** Über Abbildungsklassen von Kugeln des Hilbertschen Raumes. Compositio Math. 4, 294—304 u. 305—307 (1937).

Es werden Abbildungen der Form (1)  $y_\infty = \mathfrak{G}(x) = \kappa + \mathfrak{F}(x)$  mit vollstetigem  $\mathfrak{F}(x)$  untersucht, welche die Einheitskugel  $S^\infty: \sum_{i=1}^\infty x_i^2 = 1$  des Hilbertschen Raumes in sich überführen. Eine Abbildung  $y = \mathfrak{G}(x)$  wird Schichtenabbildung genannt, falls es eine  $n$ -dimensionale Ebene  $E^n$  gibt, so daß in jeder zu  $E^n$  parallelen Ebene  $\bar{E}^n$  die Relation  $\mathfrak{G}(E^n \cdot S^\infty) \subset \bar{E}^n S^\infty$  gilt. Eine Schichtenabbildung, bei der die zugrunde gelegte Ebene eine  $E_2$  ist und für welche die Abbildung von  $S^\infty \cdot E_2$  auf sich selbst bei passen-

der Wahl des Anfangspunktes der Winkelvariable  $\varphi$  die Form  $\varphi' = \gamma\varphi$  besitzt, wird als Normalabbildung  $\mathfrak{A}_\gamma$  ( $\gamma = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ) bezeichnet. Jede Transformation (1) ist auf  $S^\infty$  einer Normalabbildung homotop, wie auch zwei Normalabbildungen  $\mathfrak{A}_\gamma, \mathfrak{A}_{\gamma'}$  dann und nur dann unter sich homotop sind, wenn  $\gamma = \gamma'$ . Die Überföhrungsfunktionen der in Betracht kommenden Homotopien sind von der Gestalt  $\kappa + \mathfrak{U}(\kappa, t)$  mit vollstetigem  $\mathfrak{U}$  im Produktraume  $\kappa \times t$  ( $\kappa \in S^\infty, t$  reell:  $0 \leq t \leq 1$ ). Somit zerfallen die Abbildungen (1) in Abbildungsklassen (Verallgemeinerung eines Satzes von H. Hopf in  $S^n$ ).

Schauder (Lwów).

**Dowker, C. H.: Hopf's theorem for non-compact spaces.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **23**, 293—294 (1937).

Übertragung der Sätze von Hopf, Brusclinsky und Freudenthal, betreffend die Beziehungen zwischen Bettischen Gruppen und Gruppen von Klassen stetiger Abbildungen eines Polyeders bzw. eines Kompaktums in die  $S^n$  auf den Fall beliebiger normaler Räume. Dabei müssen Homotopien durch „gleichmäßige Homotopien“ ersetzt und Bettische Gruppen im Sinne von Čech verstanden werden. — Die Arbeit ist nur eine Voranzeige ohne Beweise. P. Alexandroff (Moskau).

**Eilenberg, Samuel: Sur les espaces multicohérents. II.** Fundam. Math. **29**, 101—122 (1937).

Fortsetzung des ersten Teils [Fundam. Math. **27**, 153—190 (1936); dies. Zbl. **15**, 277; in jenem Ref. wird übrigens die Eilenbergsche Invariante  $r(X)$  durch  $n(x)$  bezeichnet]. In einem ersten Paragraphen wird das Verhalten der im ersten Teil eingeföhrten Invarianten  $b_1(X)$  und  $r(X)$  sowie  $b_1(X) - r(X)$  bei kleinen Abbildungen und kleinen Transformationen (im Sinne des Ref.) untersucht: es wird gezeigt, daß diese Invarianten durch solche Abbildungen nicht erniedrigt werden können. Im zweiten Paragraphen wird das Verhalten derselben Invarianten bezüglich gewisser Eigenschaften der Nerven gewisser Überdeckungen des Raumes untersucht und vor allem bewiesen:  $b_1(X) = \sup_{(\mathfrak{G})} b_1[N(\mathfrak{G})]$  und  $r(X) = \sup_{(\mathfrak{G})} r[N(\mathfrak{G})]$ , wobei  $\mathfrak{G}$  alle endlichen Überdeckungen von  $X$  mit zusammenhängenden offenen Mengen durchläuft. Dabei bedeutet  $X$  immer ein lokal zusammenhängendes Kontinuum. Ferner wird bewiesen:

$$r(X) = \sup_{(\mathfrak{G})} b_1[N(\mathfrak{G})],$$

wobei jetzt  $\mathfrak{G}$  alle Überdeckungen zweiter Ordnung von  $X$  mit zusammenhängenden offenen Mengen durchläuft. Im § 3 wird bewiesen:

$$r(X) = \tau[\pi_1(X)],$$

wobei  $\pi_1(X)$  die Fundamentalgruppe von  $X$  bezeichnet und für eine beliebige topologische Gruppe  $G$  die Zahl  $\tau(G)$  durch folgende Bedingung definiert ist: Es ist  $\tau(G) \geq n$ , wenn  $G$  stetig-homomorph auf die freie Gruppe mit  $n$  Erzeugenden abgebildet werden kann. § 4 enthält Anwendungen und Spezialisierungen der obigen Sätze für den Fall unendlicher Polyeder. Im § 7 werden metrisch-homogene  $X$  näher untersucht. Für sie wird bewiesen, daß entweder  $r(X) = 0$  oder  $r(X) = 1$  ist, woraus sich leicht ergibt, daß ein metrisch-homogenes eindimensionales  $X$  eine einfache geschlossene Kurve ist. Im § 6 wird das Phänomen der schwachen Verschlingung (im  $R^3$ ) untersucht. Zwei eindimensionale (Polygon-) Zyklen  $z_1$  und  $z_2$  heißen im  $R^3$  schwach verschlungen, wenn für je zwei Polyeder  $P_1 \supset z_1, P_2 \supset z_2$  des  $R^3$  immer  $P_1 \cdot P_2 \neq 0$  ist, wenn nur  $z_i$  in  $P_i$  divisionshomolog Null ist ( $i = 1, 2$ ). Zwei offene Ringkörper  $R_1, R_2$  sind im  $R^3$  definitionsgemäß schwach verschlungen, wenn ihre abgeschlossenen Hüllen disjunkt sind und jedes Paar von eindimensionalen Zyklen  $z_1 \subset R_1, z_2 \subset R_2, z_i \approx 0$  in  $R_i$ , schwach verschlungen sind. Sind schließlich  $L_1$  und  $L_2$  zwei einfache geschlossene disjunkte Polygone des  $R^3$ , so lassen sich offene Ringkörper mit disjunkten abg. Hüllen als  $\varepsilon$ -Umgebungen von  $L_1$  bzw.  $L_2$  immer so wählen, daß mittels einer topologischen Selbstabbildung des  $R^3$  die eine Umgebung auf die andere abgebildet werden kann. Sind solche Umgebungen schwach verschlungen, so heißen  $L_1$  und  $L_2$  ebenfalls schwach



verschlungen. Wir setzen  $P = R - L_1 - L_2$  und  $\pi_1 = \pi_1(P)$ . Sodann gilt: Es ist  $\tau(P) = 1$  oder 2, je nachdem  $L_1$  und  $L_2$  schwach verschlungen sind oder nicht; dann und nur dann sind  $L_1$  und  $L_2$  schwach verschlungen, wenn  $P$  wesentlich auf den Torus abgebildet werden kann; ferner besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die schwache Verschlingung von  $L_1$  und  $L_2$  auch darin, daß  $\tau(\pi_1) < 2$  ist. Der § 5 enthält eine speziellere Untersuchung der Zahl  $\tau(G)$ . *P. Alexandroff* (Moskau).

## Mechanik.

**Losada y Puga Cristobal de:** Erste Einführung in die Dynamik. Sonderdruck aus: Rev. Univ. Catol. Peru Bd 4, 16 S. (1936).

**Mettler, Eberhard:** Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisel. Math. Z. 43, 59—100 (1937).

This paper deals with the problem of a rigid body turning about a fixed point under the action of gravity. As differential equations, the author takes not the Eulerian equations, in spite of their simple and symmetrical form, but the Hamiltonian equations, which have the advantages that the cyclic coordinate  $\psi$  can be readily eliminated, and suitable coordinates can be introduced by means of contact transformations. He obtains Staudé's stationary rotations, and examines solutions differing but slightly from them. Thus results are obtained resembling those relating to periodic and asymptotic solutions in the problem of three bodies. In the last section some examples are discussed numerically. *Whittaker* (Edinburgh).

**Garcia, Godofredo:** Théorie du choc oblique. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 6, 104—108 (1937).

L'auteur trouve les vitesses finales dans le cas du choc de  $n$  corps élastiques, et il en déduit la loi de la conservation de la quantité de mouvement et de la force vive du système. *H. I. E. Beth* (Amersfoort).

## Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

● **Synge, J. L.:** Tensorial methods in dynamics. (Univ. of Toronto studies appl. math. ser. Nr 2.) Toronto: Univ. press 1936. 38 S.

This (delivered originally as an address to the American Mathematical Society) is a general survey of the applications of tensor calculus to dynamics. The subject began with the well-known paper of Ricci and Levi-Civita in 1900; but apart from some work by J. E. Wright in 1908, no advance was made until 1924, since when the chief investigators have been Horak, Synge, Vranceanu, and Wundheiler. The behaviour of a general dynamical system is precisely that which we should naturally assign to a single particle in  $N$ -dimensional space, e.g. (for a scleronomous holonomic system) the force, the tangent to the trajectory, and its first normal lie in a 2-element, and acceleration equals force. The author discusses stability and least curvature, and the theory of quasi-coordinates in non-holonomic systems; a full bibliography is given. *Whittaker* (Edinburgh).

**Mineur, Henri:** Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des paramètres fonctions du temps. Étude des systèmes admettant  $n$  intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. J. École polytechn., III. s. 143, 173—191 u. 237—270 (1937).

Consider a dynamical system with  $n$  degrees of freedom which involves certain parameters  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . It is supposed that when these parameters are constant, a certain number of properties of the motion are known (this is called the elementary motion). The author discusses the motion when these parameters are given functions of the time (the varied motion), as in the case of the pendulum of variable length, and the gyroscope whose moments of inertia are variable. When the parameters vary slowly, we have the theory of adiabatic invariance: but the author considers

also cases (of interest in astronomy) where the variation is not slow. The treatment is based on the method of variation of constants. When a complete integral of the Hamilton-Jacobi equation is known for the elementary motion, the equations of the varied system take a simple form. When the system possesses  $n$  first integrals in involution satisfying certain general conditions, it is possible to define  $n$  independent variables such that the coordinates of a point of the system can be expressed in terms of these variables by regular functions having  $n$  systems of independent periods; in the elementary motion these  $n$  variables are linear functions of the time. The author then defines  $n$  quantities analogous to moduli of periodicity, which in the case of adiabatic variation are adiabatic invariants, and shows how the system can be quantified in the manner of Sommerfeld by equating them to multiples of Planck's constant.

*Whittaker* (Edinburgh).

**Watson, W. H.:** Periodic motion in functional dynamics. *Philos. Mag.*, VII. s. 24, 26—34 (1937).

This is a study of certain problems of vibration in the system of dynamics associated with Volterra's theory of functionals, which has been extensively used by the author in connexion with the representation of electromagnetic fields [*Philos. Trans. Roy. Soc. London* 236, 155 (1937); this Zbl. 16, 213]. Here he discusses a kinematic analogue of the simple harmonic motion of a particle, a dynamical analogue of the simple pendulum, and an analogue of the propagation of transverse waves along a taut wire.

*Whittaker* (Edinburgh).

## Mathematische Physik.

**Jordan, P.:** Die physikalischen Weltkonstanten. *Naturwiss.* 25, 513—517 (1937).

**Njegovan, V.:** Über eine phänomenologische Deutung der thermodynamischen Konstanten. *Acta Physica Polon.* 6, 109—124 (1937).

**Osterberg, Harold, and John W. Cookson:** The piezodielectric effect and electrostriction in anisotropic or isotropic media. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 1096—1101 (1937).

Es wird eine phänomenologische Theorie für den Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor in einem deformierten Dielektrikum und den in den Spannungskomponenten linearen Änderungen der dielektrischen Konstanten entwickelt. Für den isotropen Körper enthält die Theorie 2 unabhängige Koeffizienten, für  $\alpha$ -Quarz 8, für Seignettesalz 12, für den allgemeinen Körper 36. Es wird ferner die Theorie des umgekehrten Effekts, das Auftreten von Deformationen durch Anlegen eines elektrischen Feldes, kurz als Elektrostriktion bezeichnet, erörtert. Die Bewegungsgleichungen des Dielektrikums unter dem Einfluß mechanischer Kräfte und elektrischer Felder werden aufgestellt.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

## Optik:

**Herzberger, M.:** Optics in the large. *J. Opt. Soc. Amer.* 27, 202—206 (1937).

Als „Optics in the large“ bezeichnet der Verf. die Untersuchung von Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften, wie der scharfen Abbildung des ganzen Raumes oder der Abbildung, wo jedem Punkte eine achsensymmetrische Kaustik entspricht usw. Als Mittel zur Untersuchung dienen die charakteristischen Funktionen von Hamilton oder die Eikonale von Bruns. — Für achsensymmetrische Flächenfolgen empfiehlt Herzberger statt der Variablen  $\xi^2 + \eta^2$ ,  $2(\xi\xi' + \eta\eta')$ ,  $\xi'^2 + \eta'^2$  vielmehr  $\kappa = \zeta$ ,  $\lambda = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$ ,  $\mu = \zeta'$  zu benutzen. — Er erinnert an die Sätze von Bruns, Maxwell, Abbe, Staebli-Lihotzky und gibt dann einen Überblick über die Untersuchungen, die er und der Berichtende (z. T. gemeinsam) veröffentlicht haben. Für die Zeit bis 1931 findet sich eine Zusammenfassung in Herzbergers Buch (dies. Zbl. 3, 88), für die spätere Zeit werden die einzelnen Abhandlungen angeführt (dies. Zbl. 11, 44, 188; 12, 287; 13, 188; 14, 92).

*Hans Boegehold* (Jena).



**Mezhvarišvili, I.:** Über eine Aufgabe der geometrischen Optik. Trav. Inst. Math. Tbilissi 1, 73—79 u. russ. Zusammenfassung 72—82 (1937) [Georgisch].

Ein mit der Geschwindigkeit  $c(x, y, z)$  fortschreitender Strahl gelangt nach dem Fermatschen Prinzip in der Zeit

$$\tau = \min \int_A^B \frac{ds}{c(x, y, z)} \quad (1)$$

vom Punkte  $A$  zum Punkte  $B$ . Verf. legt der Funktion  $c(x, y, z)$  gewisse Bedingungen auf, die es mittels eines einfachen Konstruktionsverfahrens gestatten, aus den Extremalen (Strahlen), die das Integral (1) zum Minimum machen, vollkommene (d. h. in allen Punkten) geodätische Flächen aufzubauen, die folgende Eigenschaft besitzen: ein durch beliebige zwei Punkte der Fläche hindurchgehender Strahl gehört ganz der Fläche an.

V. Kupradze (Tbilissi, USSR.).

**Garavito Armero, Julio:** Theorie der Aberration des Lichtes. Rev. Acad. colomb. Ci. exact. etc. 1, 59—65 (1936) [Spanisch].

**Anderson, Wallace E.:** Intensity of light reflected from a parallel plate. J. Opt. Soc. Amer. 27, 300—302 (1937).

Der Verf. leitet die für die Intensität des an einer planparallelen Platte reflektierten Lichtes gültige Formel ab, ohne die sonst im allgemeinen übliche Voraussetzung zugrunde zu legen, daß der Phasensprung bei der inneren Reflexion den Betrag  $\pi$  hat. Er nimmt an, daß je zwei aufeinanderfolgende der sich überlagernden Strahlen eine bestimmte, von 0 und  $\pi$  verschiedene Phasendifferenz besitzen. Als Spezialfall ergibt sich natürlich unter entsprechenden Annahmen wieder die übliche Formel. *Picht*.

**Seemann, H.:** Zur Optik der Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. Weitwinkeldiagramme als reziprokes Gitterbild in hyperbolischen Polarkoordinaten. Ber. naturforsch. Ges., Freiburg i. Br. 35, 134—161 (1937).

Der Verf. gibt zunächst einen allgemeinen Überblick über die verschiedenen Verfahren zur röntgenographischen Untersuchung von Kristallen und über ihre Auswertung zur Bestimmung der Netzebenen. Er beschreibt dann eingehend ein neues Goniometerverfahren, mit dem „vorwärts reflektierte Weitwinkeldiagramme“ erzeugt werden, die eine symmetrietreue Abbildung des Querschnitts einer Netzebenenzone darstellen. Man erhält im Bilde Stücke von Hyperbeln, die sich zu vollen Hyperbeln ergänzen lassen. Das Abstandsverhältnis der entstehenden Linien ist in der Mitte gleich dem des reziproken Gitters. Nach dem Rande tritt eine hyperbolische Verzerrung auf, die sich bei der Auswertung durch die Verzerrungsfunktion, die leicht tabellarisch dargestellt werden kann, entzerren läßt. Man erhält so als reduziertes Bild das genaue, vielfach periodische „reziproke Liniengitter“ der erzeugenden Zone. Auch die Abbildung schief projizierter Zonen läßt sich leicht symmetrietreu machen.

*Picht* (Neubabelsberg).

**Szule, Mikołaj:** Calcul vectoriel de la réfraction dans un prisme en dehors de la section principale. Acta Physica Polon. 6, 103—108 (1937).

**Funk, Paul:** Berichtigung und Ergänzung zu meiner Arbeit: Über die Seidelsche Fehlertheorie in der Elektronenoptik. Mh. Math. Phys. 45, 314—319 (1937).

Rectification of calculation errors in Funk's previous paper (this Zbl. 14, 188). The connection between his formulae and the formulae for the image errors given by W. Glaser are developed.

M. Herzberger (Rochester).

**Cotte, Maurice:** Approximation de Gauss pour les systèmes généraux de l'optique électronique. C. R. Acad. Sci., Paris 205, 129—131 (1937).

Unter Zugrundelegung krummliniger Koordinaten, die so gewählt sind, daß eine Kurve  $C$ , der die Bahnen der elektrisch geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld hinreichend benachbart sind, durch die Gleichungen  $x = 0$ ,  $y = 0$  dargestellt wird, während die Flächen  $z = z_0$  die Ebenen normal zur Kurve  $C$  im Punkte  $z_0$  der

Kurve darstellen und die Flächen  $x = 0$  und  $y = 0$  abwickelbare Flächen sind, gebildet durch die Normalen bzw. die Binormalen der Kurve  $C$ , stellt der Verf. für die Bahnen der elektrisch geladenen Teilchen Differentialgleichungen auf, wobei er Terme von höherer als zweiter Ordnung in  $x' = \frac{dx}{dz}$ ,  $y' = \frac{dy}{dz}$  vernachlässigt. Durch Drehung der — rechtwinklig zueinanderstehenden —  $x$ - und  $y$ -Achse um einen von  $z_0$  abhängenden Winkel lassen sich die Differentialgleichungen vereinfachen. Weitere Vereinfachung ist möglich, wenn eine Symmetrieebene existiert, in der die Kurve  $C$  liegend vorausgesetzt werden kann. Picht (Neubabelsberg).

### Quantentheorie:

**Placinteanu, I. I.:** L'équation de Dirac pour un corps à masse variable. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 18, 8—11 (1936).

**March, Arthur:** Zur Grundlegung und Anwendung einer statistischen Metrik. Z. Physik 105, 620—632 (1937).

**March, Arthur:** Statistische Metrik und Quantenelektrodynamik. Z. Physik 106, 49—69 (1937).

Die bisherigen Untersuchungen zur Quantenelektrodynamik haben gezeigt, daß die der folgerichtigen Durchführung dieser Theorie entgegenstehenden grundsätzlichen Schwierigkeiten — unendliche Selbstenergie des Elektrons sowie sonstige prinzipielle Unendlichkeits- und Divergenzschwierigkeiten — eine einheitliche Wurzel haben. Man kann die Situation so ausdrücken, daß alle Schwierigkeiten zu beseitigen wären, wenn man die „vierdimensionale Deltafunktion“  $\Delta = \frac{1}{r} (\delta(r - ct) - \delta(r + ct))$ , in der  $\delta$  die Diracsche singuläre Funktion bedeutet, ersetzen könnte durch eine andere Funktion  $\Delta'$  mit den Eigenschaften, daß: 1.  $\Delta'$  wie  $\Delta$  lorentzinvariant wäre; 2.  $\frac{\partial \Delta'}{\partial t}$  bei Spezialisierung auf einen dreidimensionalen Schnitt des vierdimensionalen Weltkontinuums nicht (wie  $\frac{\partial \Delta}{\partial t}$ ) die Diracfunktion  $\delta(\mathbf{r})$ , sondern eine Funktion  $D(\mathbf{r})$  lieferte, die überall endlich wäre, und nur für solche  $|\mathbf{r}|$ , die größer als ein  $r_0$  sind, verschwände. Die Einführung einer solchen Funktion in die Vertauschungsregeln der Quantenelektrodynamik könnte gedeutet werden als Verzicht auf das Nahwirkungsprinzip innerhalb sehr kleiner Abstände oder auch als Verzicht auf die gewöhnliche Geometrie innerhalb kleinster Abstände. Aber leider existiert ein  $\Delta'$  mit den gewünschten Eigenschaften nicht. Der Verf. versucht nun den Ausweg, der Funktion  $D(\mathbf{r})$  nur die invarianten Bedingungen  $\int D(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$  und  $D(\mathbf{r}) = 0$  für  $|\mathbf{r}| > r_0$  aufzuerlegen, sie aber für  $|\mathbf{r}| < r_0$  unbestimmt zu lassen; sie soll — in nicht ganz durchsichtiger Weise — je nach Art der betrachteten Experimente verschiedenen Verlauf innerhalb  $|\mathbf{r}| < r_0$  haben. P. Jordan (Rostock).

**Slater, J. C.:** Wave functions in a periodic potential. Physic. Rev., II. s. 51, 846—851 (1937).

Vorschlag einer neuen Berechnungsweise der Wellenfunktion für die Bewegung eines Elektrons in einem periodischen Potentialfeld, z. B. in einem Kristall. Das Potential wird als kugelsymmetrisch angenommen in einem kugelförmigen Bereich um das Atom und als konstant im Zwischengebiet zwischen diesen Kugeln. An jedem Kern kann dann die Wellenfunktion in bequemer Form angeschrieben werden; an der Oberfläche der Kugeln wird sie an die außerhalb „gültige“ ebene Welle stetig angeschlossen. Das Problem wird nach solchen (zusammengestückelten) Wellenfunktionen entwickelt und die Säkulargleichung der Energie aufgeschrieben. Bemerkungen über (angenäherte) Lösungsmethoden dieser Gleichung und Anwendbarkeit des hier vorgeschlagenen Verfahrens überhaupt. Bechert (Gießen).



**Sommerfeld, Arnold:** Über die Kleinschen Parameter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und ihre Bedeutung für die Dirac-Theorie. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1936, 639—650 (H. 9/10).

The theory of the Cayley-Klein parameters, which are used for the representation of rotations in three-dimensional space, may be extended so as to furnish a representation of rotations in four-dimensional space (Lorentz transformations). In three-dimensional space the parameters  $\alpha, \beta$ , are complex-conjugate to  $\delta, -\gamma$ , respectively, but in four-dimensional space these conditions no longer hold. Just as orthogonal transformations in three-dimensional space may be represented by quaternions, so Lorentz transformations may be represented by biquaternions. The theory of spinors, which is of importance for Dirac's equation of the magnetic electron, is closely connected with these considerations.

Whittaker (Edinburgh).

**Fock, V.:** Über die Bose-Amplituden in der Neutrinotheorie des Lichtes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 241—244 (1937).

Der mathematische Widerspruch, auf den der Verf. bei der Betrachtung der Jordan-Kronigischen Neutrinotheorie gestoßen war (dies. Zbl. 15, 379), wird dahin aufgeklärt, daß die der Bosestatistik entsprechenden Vertauschungsrelationen die Einführung von Antineutrinos voraussetzen, während sonst völlige Vertauschbarkeit bestehen würde. Hierauf wird ein neuer Einwand begründet, indem der Unterschied zwischen einem Neutrino und einem Antineutrino als unbeobachtbare Größe nicht eine solche Rolle spielen dürfte.

O. Klein (Stockholm).

**Volz, H.:** Über die Größe der Kernkräfte. Z. Physik 105, 537—552 (1937).

Neuere experimentelle Untersuchungen amerikanischer Forscher [Physic. Rev. 50 806 (1936)] scheinen zu zeigen, daß zwischen zwei Protonen außer der Coulombschen Wechselwirkung dieselbe Kraft wirkt wie zwischen Proton und Neutron. Es liegt deshalb nahe, einen Kraftansatz zu machen, der in beiden Teilchen völlig symmetrisch ist. Der Zustand eines Teilchens kann durch Spin- und Ortsvariablen sowie durch eine Ladungsvariable (0 für Neutron, 1 für Proton) beschrieben werden. Nach dem Pauliprinzip ist eine Wellenfunktion für zwei Teilchen antisymmetrisch bei Vertauschung sämtlicher Variablen; die Symmetrie (bzw. Antisymmetrie) in Spin- und Ladungsvariablen kann durch die Symbole (13), (31), (11), (33) angegeben werden (die erste Zahl gibt die Spinmultiplizität, die zweite die Ladungsmultiplizität an). Die Wechselwirkung kann nun für die verschiedenen Symmetrieverhältnisse verschieden sein, und zwar nimmt Verf. an, daß sie sich um einen konstanten Faktor  ${}^kA$  unterscheiden kann, während die Abhängigkeit von den räumlichen Koordinaten immer die gleiche ist (Gaußsche Fehlerfunktion). Aus den experimentellen Ergebnissen über das Deuteron und die Streuung von Protonen an Neutronen ergibt sich  ${}^{13}A : {}^{31}A \sim 2$ . Aus der Forderung, daß die Theorie keine Kerne zulassen soll, die sich von den wirklich vorkommenden Kernen wesentlich unterscheiden, und einigen sich auf die mathematischen Näherungsverfahren beziehenden Forderungen, leitet Verf. weiter ab, daß die Beziehungen  $3 {}^{13}A + {}^{11}A = 0$  und  $3 {}^{33}A + {}^{31}A = 0$  wenigstens annähernd gültig sein müssen.

Casimir (Leiden).

**Flügge, S.:** Die Massendefekte der leichtesten Atomkerne auf Grund der neuen Annahmen über die Kräfte. Z. Physik 105, 522—536 (1937).

Im Anschluß an die Arbeit von Volz (vgl. das vorst. Ref.) werden die Massendefekte von Deuteron, Triton und  $\text{He}^3$  neu berechnet. Im Vergleich zu früheren Rechnungen zeigen die Ergebnisse eine kleine Verbesserung. Die Rechnungen führen nicht zu einer Prüfung der von Volz aufgestellten Bedingungen. Schließlich wird gezeigt, daß ein Wasserstoffkern von der Masse 4 instabil sein muß.

Casimir (Leiden).

**Goldstein, L.:** Sur les énergies de désintégration nucléaires. J. Physique Radium, VII. s. 8, 235—240 (1937).

Verf. macht darauf aufmerksam, daß bei einem radioaktiven Zerfallsprozeß die Energie der Elektronenhülle sich ändern muß und diskutiert den Einfluß dieser Änderung auf die Energie (bzw. das Energiespektrum) der emittierten Teilchen.

Casimir.



Schiff, L. I.: On the capture of thermal neutrons by deuterons. *Physic. Rev.*, II. s. 52, 242 (1937).

Kofink, W.: Über das magnetische und elektrische Moment des Elektrons nach der Diracschen Theorie. *Ann. Physik*, V. F. 30, 91—98 (1937).

Verf. geht aus von den Identitäten, welche nach Pauli zwischen gewissen, mit Hilfe der 16 linear unabhängigen Matrizen der Diracschen Theorie bilinear konstruierten Ausdrücken bestehen. Er zeigt nun, daß, wenn man sich nicht mehr auf Relationen zwischen relativistisch invarianten Summen der obenerwähnten Größen beschränkt, neue Beziehungen abgeleitet werden können, die eine anschauliche Bedeutung betreffend das magnetische und elektrische Moment des Elektrons haben.

R. de L. Kronig (Groningen).

Kar, S. C.: Die Feinstrukturformel von Sommerfeld und der Elektronenspin. *Z. Physik* 106, 418—422 (1937).

Es wird ein Paar etwas modifizierter relativistischer Schrödingergleichungen zugrunde gelegt und durch zweideutige Kugelflächenfunktionen (von halbzahligem Index) gelöst. Es zeigt sich, daß sich mit einem solchen Schema die Feinstruktur des Wasserstoffs quantitativ genau wie in der Diracschen Theorie ergibt. Die zugrunde gelegten Gleichungen genügen nicht der relativistischen Invarianzforderung. S. Flügge.

Pincherle, L.: L'origine delle linee satelliti negli spettri di raggi X. *Nuovo Cimento*, N. s. 14, 185—195 (1937).

Verf. berechnet nach der Quantenmechanik die Intensität von Röntgensatelliten, die ihren Ursprung in dem Übergang eines Elektrons nach einem unbesetzten Quantenzustand im Atominnern und dem gleichzeitigen Sprung eines Valenzelektrons haben. Er zeigt, daß solche Prozesse, auf deren Möglichkeit zuerst von Richtmyer hingewiesen worden ist, so unwahrscheinlich sind, daß die betreffenden Satelliten sich der Beobachtung entziehen müssen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Slater, J. C.: Damped electron waves in crystals. *Physic. Rev.*, II. s. 51, 840—846 (1937).

Bei der Elektronenbeugung an festen Körpern beobachtet man starke „Dämpfung“ (Intensitätsabnahme) der reflektierten Elektronenstrahlen, wenn die Elektronenenergie über der ersten Anregungsstufe der Kristallatome liegt. Verf. gibt eine phänomenologische Beschreibung der Erscheinungen durch Einführung eines rein imaginären Zusatzpotentials; die beobachteten Erscheinungen kommen gut heraus. Bechert.

Ariyama, Kanetaka: Zur Elektronentheorie der Metalle. *Sci. Pap. Inst. physic. Chem. Res.*, Tokyo 32, 103—119 (1937).

Es wird das Problem des Ferromagnetismus eines Metalls untersucht, wobei Verf. von einem polaren Modell ausgeht, d. h. einem Modell, in dem auch ionisierte Zustände der Atome mit berücksichtigt werden. Die Rechnung beschränkt sich auf Temperaturen, die klein gegenüber der Curietemperatur sind. Die Sättigungsmagnetisierung folgt dann ungefähr dem Blochschen  $T^{3/2}$ -Gesetz, genauer einem Gesetz von der Form  $T^{3/2} e^{-\theta/2T}$ , in einer gewissen Ähnlichkeit mit dem Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit von Halbleitern. Die Bedingungen für das Auftreten des Ferromagnetismus sind in diesem Modell viel strenger als in dem Heisenberg-Blochschen nichtpolaren Modell.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wiek, G. C.: Sulla diffusione dei neutroni nei cristalli. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 1, 400—411 (1937).

Die Streuung langsamer Neutronen an einem Kristall (der der Einfachheit halber als einfach kubisch angenommen wird) wird theoretisch untersucht. Während die elastische Streuung völlig analog der von Röntgenstrahlen der gleichen Wellenlänge ist, treten bei der unelastischen Streuung neue Eigentümlichkeiten auf. Dies liegt daran, daß die Energieänderung, die zur Erzeugung oder Vernichtung eines elastischen Quanta gehört, mit der Energie der Neutronen vergleichbar ist, während man sie gegenüber der Energie der Röntgenstrahlen völlig vernachlässigen kann. Solange man



den Kristall durch ein elastisches Kontinuum ersetzt, ist es klar, daß keine unelastischen Zusammenstöße stattfinden können, falls der Kristall im Zustand tiefster Energie ist, und die Geschwindigkeit des Neutrons kleiner als die Schallgeschwindigkeit. Bei der Verlangsamung der Neutronen in einem festen Körper sehr tiefer Temperatur sollte man daher erwarten, daß stets Neutronen übrigbleiben, die noch nicht bis auf thermische Energie verlangsamt worden sind und trotzdem keine weitere Energie mehr verlieren können. Dieser Tatbestand bleibt auch bei Berücksichtigung der atomaren Struktur erhalten, nur wird die kritische Neutronenenergie, unterhalb deren keine Verlangsamung mehr stattfinden kann, etwas herabgesetzt. Die Wahrscheinlichkeit von Zusammenstößen, die zur Erzeugung mehrerer Schallquanten führen, wird kurz diskutiert.

*R. Peierls (Cambridge).*

**Opechowski, W.: Über die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung eines Ferromagnetikums bei tiefen Temperaturen.** *Physica* 4, 715—722 (1937).

Die kürzlich von Kramers angegebene Methode zur theoretischen Behandlung des Ferromagnetismus (vgl. dies. Zbl. 16, 288) wird benutzt zur genaueren Berechnung des Annäherungsgesetzes der Magnetisierung an die absolute Sättigung mit sinkender Temperatur. Die numerisch ausgewertete Endformel lautet:

$$\sigma/\sigma_0 = 1 - 0,609(T/\theta)^{3/2} + 0,318(T/\theta)^2 - 0,236(T/\theta)^{5/2}.$$

Sie unterscheidet sich von dem früher auf ganz anderem Wege von Bloch abgeleiteten Sättigungsgesetz nur durch die beiden letzten Glieder, von denen mindestens das  $T^2$ -Glieder im Gültigkeitsbereich der Rechnung nicht zu vernachlässigen ist. (Experimentell gefundene Abweichungen vom  $T^{3/2}$ -Gesetz deuten freilich auf einen negativen  $T^2$ -Term hin.)

*E. Vogt (Marburg).*

## Astrophysik.

**Strömgren, Bengt: The boundary-value problem of the theory of stellar absorption lines.** *Astrophys. J.* 86, 1—27 (1937).

The author gives a method for the theoretical calculation of intensities within stellar absorption lines. It is applicable to the case when the ratio of continuous absorption to continuous-plus-line absorption varies through the atmosphere in such a manner that the relative changes are sufficiently small but otherwise arbitrary. The fundamental differential equation for the intensity within an absorption line has been established in a thorough discussion by the author (this Zbl. 12, 179), and is formally the same as that treated by Eddington, Milne, Rosseland, and others. The problem of its solution is here stated as a boundary-value problem, and the variation of the parameters is dealt with by the standard methods of perturbation theory. If  $B_\nu$  is the Planck intensity corresponding to the local temperature at optical depth  $t_\nu$ , and if  $\lambda_\nu = (k_\nu + \varepsilon l_\nu)/(k_\nu + l_\nu)$ , when  $k_\nu, l_\nu$  are the coefficients of continuous and line absorption at depth  $t_\nu$ , and  $\varepsilon$  is a small quantity which measures the effect of electron capture and of collisions (Strömgren, loc. cit.), all these quantities referring to frequency  $\nu$ , the following rule is evolved: In order to calculate the intensity within an absorption line we strike a mean  $\sqrt{\lambda_\nu}$  of the  $\sqrt{\lambda_\nu}$  values with the weighting function  $\exp\{-2\sqrt{3}(\lambda_\nu)_0 t_\nu\}$ , then a mean of the  $B_\nu$  values with the weighting function  $\exp\{-\sqrt{3}\sqrt{\lambda_\nu} t_\nu\}$ ; the intensity is calculated as if  $\sqrt{\lambda_\nu}$  and  $B_\nu$  were constant throughout the atmosphere and equal to these mean values. Here  $(\lambda_\nu)_0$  is a properly chosen constant value of  $\lambda_\nu$  on which the "perturbation" is superposed. The results facilitate a discussion of the relative influence of various layers of the atmosphere upon the emergent intensity. Cases previously treated by Eddington, Unsöld, and Woolley, are studied as particular cases of the present theory. A discussion of the range of applicability of the theory, and of its degree of accuracy, is given. The details of



the method are given fully in the paper, and it should be consulted for these, since the method is likely become a standard one in problems of line-contours. *McCrea*.

**Chandrasekhar, S.:** The opacity in the interior of a star. *Astrophys. J.* 86, 78—83 (1937).

The author proves, by methods similar to those previously used, Theorems 8 and 9 in the sequence begun by him in two other papers (this *Zbl.* 14, 235; 16, 424). The results are

$$L \leq \frac{4\pi c G M (1 - \beta^*)}{\kappa \eta}, \quad (1)$$

and

$$\bar{\kappa} \leq \frac{4\pi c G M (1 - \beta^*)}{L}, \quad (2)$$

where

$$P_c \bar{\kappa} \eta = \int_R^0 \kappa \eta dP, \quad P_c \bar{\kappa} = \int_R^0 \kappa dP, \quad \eta = \frac{L(r)}{M(r)} \frac{L}{M},$$

in the previous notation. These apply to a wholly gaseous configuration in which the mean density  $\bar{\rho}(r)$  inside  $r$  decreases outward, and in (2) the rate of energy generation  $\epsilon$  also decreases outward. Some numerical cases are considered, and a table of values of  $(1 - \beta^*)$  for various values of  $M$  is given. *W. H. McCrea* (Belfast).

**Carroll, J. A.:** A method of determining stellar rotation. *Nature*, Lond. 140, 162 (1937).

The "proper" form of the contour of an absorption line in the spectrum of a rotating star, i.e. the form which would be given by a small element of the surface, is given in terms of the observed contour by means of an integral equation. This can be solved formally, but the solution depends on the function giving the observed contour, for complex values of its argument. This solution cannot be used in the physical problem. However, the author has shown that the real part of the Fourier transform of the function mentioned has certain properties if the star is rotating; certain of its zeros may be used to obtain the speed of rotation. Knowing the speed of rotation the "proper" contours of the lines may be found. In the case of the star Algol this method gives a rotational speed (equatorial line of sight velocity)  $26 \pm 3$  km/sec, while an independent method gives 26 km/sec. Further use of the method is being made. (See J. A. Carroll, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 93, 478, 508, 680 (1933); this *Zbl.* 7, 133.] *W. H. McCrea* (Belfast).

**Menzel, Donald H., and James G. Baker:** Physical processes in gaseous nebulae. II. Theory of the Balmer decrement. *Astrophys. J.* 86, 70—77 (1937).

In the first paper of this series (this *Zbl.* 16, 427) the general equations determining the statistical equilibrium of an assembly of atoms were set up. In the present paper an algebraic solution of these equations is given. The authors consider an assembly of hydrogenic atoms, and assume the exciting radiation to come only from beyond the limit of the Lyman series. They further suppose the electrons to have a Maxwellian velocity distribution. An expression is then found for the quantity  $b_n$  which is defined by the relation

$$N_n = b_n N_i N_e \frac{h^3}{(2\pi m k T_e)^{3/2}} n^2 e^{\frac{h R Z^2}{n^2 k T_e}},$$

where  $N_i$  and  $N_e$  are the numbers of ions and electrons per unit volume, and  $T_e$  is the electron temperature; the other symbols have their usual meanings. An asymptotic expression for  $b_n$  is derived, showing that  $b_n \rightarrow 1$  for  $n \rightarrow \infty$ . — Another paper is announced, which will contain detailed numerical computations as well as a comparison with observations. *Steensholt* (Oslo).

**Parenago, P.:** A new method of computing the co-ordinates of the galactic pole. *Astron. J. Soviet Union* 14, 327—328 u. engl. Zusammenfassung 328 (1937) [Russisch].